Egzamin sesyjny z przedmiotu **ALGEBRA LINIOWA** dla kierunku IAD B

Zadanie 1. (4p) Obliczyć $\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{12}}$. Wyniki przedstawić w postaci algebraicznej.

Zadanie 2. (4p) Obliczyć sumę <u>wszystkich</u> pierwiastków wielomianu $w(z) = 3z^5 - 2z^4 + 9z^3 - 6z^2 + 6z - 4$, a następnie wielomian ten rozłożyć na: (a) nierozkładalne czynniki rzeczywiste, (b) czynniki liniowe.

Zadanie 3. (4p) W zależności od parametru $b \in \mathbb{R}$ przedyskutować rozwiązalność układu równań:

$$\begin{cases} bx + y + (2+3b)z = 1 \\ x + y + 3bz = b \\ (b+1)x + 2y + (5b-2)z = 2 \end{cases}$$

Zadanie 4. (4p) Zbadać, czy zbiór $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ a+b & b \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Proszę uzasadnić odpowiedź.

Zadanie 5. (4p) Dane jest przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, L(x,y,z,t) = (x - y - z, y + z - t)$. Wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia liniowego L oraz ich wymiary.

Zadanie 6. (2p) Definicja grupy (proszę sformułować warunki, a nie tylko podać ich nazwy). Podać co najmniej 3 przykłady grup.

Zadanie 7. (3p) Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Równość liczb zespolonych, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych przedstawionych w postaciach trygonometrycznych.

Zadanie 8. (1p) Twierdzenie o rozkładzie wielomianu zespolonego na czynniki liniowe.

Zadanie 9. (2p) Kiedy układ równań liniowych nazywamy jednorodnym? Podać wniosek z twierdzenia Cramera dotyczący kwadratowych układów jednorodnych.

Zadanie 10. (2p) Definicja bazy przestrzeni wektorowej. Jak wygląda baza standardowa w przestrzeni $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?