

# Tematy egzaminu sesyjnego z Analizy Matematycznej I dla kierunku IAD

POLITECHNIKA LUBELSKA

9 lutego 2023 roku

## Zadanie 1.

- (i) (4p) Niech  $d : [0; +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ma postać:  $d(x, y) = \left| \ln(1+x) - \ln(1+y) \right|$ . Zbadać, czy para  $\langle [0; +\infty)^2, d \rangle$  jest przestrzenią metryczną, a w przypadku odpowiedzi pozytywnej wyznaczyć kulę  $B(0; 2)$ .
- (ii) (4p) Wyznaczyć kresy zbioru  $A = \left\{ \left| 3|z^2 - 2| - 5 \right| \leq 7 : z \in \mathbb{R} \right\}$  w zbiorze  $(\mathbb{R}, \leq)$ .

## Zadanie 2.

- (i) (3p) Zbadać w oparciu o definicję granicy ciągu czy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{3n+7} = \frac{2}{5}$ .
- (ii) (3p) Korzystając z warunku Cauchy'ego zbadać istnienie  $\underline{a}$ , gdy  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\arctg k}{k(k+1)}$ .
- (iii) (3p) Znaleźć granicę dolną i granicę górną ciągu  $b_n$ , gdy  $b_n = 2(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} - 3(-1)^n$ .

## Zadanie 3. Obliczyć dowolne trzy spośród granic ciągów o wyrazach ogólnych:

- (i) (2p)  $a_n = \left( \sqrt{2n^2 + 2^n} - \sqrt{4^n - 5} \right)$
- (ii) (2p)  $b_n = \left( \frac{n^2 + n + 2}{n^2 + n + 5} \right)^{-\frac{n^2}{2}}$
- (iii) (3p)  $c_n = \sqrt[n]{\frac{100^n + \sin^2 n}{3^n + 10^n}}$
- (iv) (2p)  $d_n = \frac{1}{\ln(n+5)} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k+3}$

## Zadanie 4. Zbadać istnienie granicy ciągu rekurencyjnego $\underline{a}$ , a jeśli istnieje obliczyć ją, gdy:

- (i) (3p)  $a_0 = 4$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 4)$ , dla  $n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) (3p)  $a_0 = -\frac{3}{2}$ ,  $a_1 = \frac{9}{8}$  oraz  $a_{n+2} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 3a_n)$ , dla  $n \in \mathbb{N}$ .

## Zadanie 5. Zbadać zbieżność dowolnych trzech szeregów

- (i) (2p)  $\sum (n+1) \sin \frac{1}{n+1}$
- (ii) (2p)  $\sum \frac{(n^2 - 1)^n}{(2n+1)!}$
- (iii) (3p)  $\sum \left[ \cos \frac{1}{n+2} - \cos \frac{1}{n+1} \right]$
- (iv) (3p)  $\sum \cos(n\pi) \frac{\ln n}{\pi^n}$

**Zadanie 6.** Bez użycia twierdzenia de l'Hospitala obliczyć dowolną z granic

(i) (2p)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(7x)}{\sqrt{16+14x}-4}$

(ii) (3p)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x-1}$

**Zadanie 7.** Obliczyć dowolne trzy granice

(i) (2p)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}$

(ii) (3p)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin(-3x))}$

(iii) (2p)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{2+x}}{\operatorname{arctg} \sqrt{4-x^2}}$

(iv) (2p)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$

**Zadanie 8.** (4p) Dla jakich wartości  $a, b, c, k$  funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na całym zbiorze  $\mathbb{R}$ , gdy:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(bx)}{x}, & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 1, & \text{dla } x = 0 \\ (a+1) \sin(x + \frac{3\pi}{2}), & \text{dla } (0; +\infty) \end{cases}$$

(ii) (3p) Funkcja  $f: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ma wzór  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x$ . Zbadać jej jednostajną ciągłość na dziedzinie.

(iii) (3p) Pokazać, że równanie  $(\sqrt{x}+1)^7 + x - 2 = 0$  ma rozwiązanie w przedziale  $(0, 1)$  oraz, że jest to jedyne rozwiązanie tego równania w tym zbiorze.

**Zadanie 9.**

(i) (3p) Dla funkcji  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  postaci  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\arcsin(x^2)}{x+2}}$  wyznaczyć jej pochodną

(ii) (3p) Na podstawie twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej dla funkcji  $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , gdy  $f(x) = \cos x$  wyznaczyć formułę na pochodną jej funkcji odwrotnej.

**Zadanie 10.**

(i) (4p) Dla funkcji  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  określonej wzorem  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$  wyznaczyć jej wartości najmniejszą i największą.

(ii) (4p) Dla funkcji  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  postaci  $f(x) = \ln x^{27} - \ln^3 x$  wyznaczyć jej ekstrema – o ile istnieją.

---

Warunki:

- Czas trwania egzaminu 150 minut.
- W przypadku niesamodzielności rozwiązań zadań, każde zadanie z taką usterką będzie ocenione na  $(-n)$  punktów, jeśli przysługiwało za nie  $n$  punktów.
- Przyjmujemy umowę, że maksymalna liczba punktów będąca podstawą oceny wynosi 50, a ocena pozytywna z egzaminu, to minimum 25 punktów.