Tematy egzaminu sesyjnego z Analizy Matematycznej I dla kierunku IAD

POLITECHNIKA LUBELSKA

9 lutego 2023 roku

Zadanie 1.

(i) (4p) Niech $d : [0;+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ ma postać: $d(x,y) = \Big|\ln(1+x) - \ln(1+y)\Big|$. Zbadać, czy para $\langle [0;+\infty)^2, d\rangle$ jest przestrzenią metryczną, a w przypadku odpowiedzi pozytywnej wyznaczyć kulę $B(0;2)$.

(ii) (4p) Wyznaczyć kresy zbioru $A = \left\{ \Big|3|z^2-2|-5\Big| \leq 7 : x \in \mathbb{R} \right\}$ w zbiorze $(\mathbb{R}, \leq)$.

Zadanie 2.

(i) (3p) Zbadać w oparciu o definicję granicy ciągu czy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+5}{3n+7} = \dfrac{2}{5}$.

(ii) (3p) Korzystając z warunku Cauchy'ego zbadać istnienie $\underline{a}$, gdy $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\operatorname{arctg} k}{k(k+1)}$.

(iii) (3p) Znaleźć granicę dolną i granicę górną ciągu b_n, gdy $b_n = 2(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} - 3(-1)^n$.

Zadanie 3. Obliczyć <u>dowolne trzy</u> spośród granic ciągów o wyrazach ogólnych:

(i) (2p) $a_n = \left(\sqrt{2n^2+2^n} - \sqrt{4^n-5}\right)$

(ii) (2p) $b_n = \left(\dfrac{n^2+n+2}{n^2+n+5}\right)^{-\frac{n^2}{2}}$

(iii) (3p) $c_n = \sqrt[n]{\dfrac{100^n + \sin^2 n}{3^n+10^n}}$

(iv) (2p) $d_n = \dfrac{1}{\ln(n+5)} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k+3}$

Zadanie 4. Zbadać istnienie granicy ciągu rekurencyjnego $\underline{a}$, a jeśli istnieje obliczyć ją, gdy:

(i) (3p) $a_0 = 4$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2+4)$, dla $n \in \mathbb{N}$.

(ii) (3p) $a_0 = -\frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{9}{8}$ oraz $a_{n+2} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 3a_n)$, dla $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 5. Zbadać zbieżność dowolnych trzech szeregów

(i) (2p) $\sum (n+1)\sin\dfrac{1}{n+1}$

(ii) (2p) $\sum \dfrac{(n^2-1)^n}{(2n+1)!}$

(iii) (3p) $\sum \left[\cos\dfrac{1}{n+2} - \cos\dfrac{1}{n+1}\right]$

(iv) (3p) $\sum \cos(n\pi)\dfrac{\ln n}{\pi^n}$

Zadanie 6. Bez użycia twierdzenia de l'Hospitala obliczyć dowolną z granic

(i) (2p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(7x)}{\sqrt{16+14x}-4}$

(ii) (3p) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{2x-1}$

Zadanie 7. Obliczyć dowolne trzy granice

(i) (2p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}$

(ii) (3p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\sin(-3x))}$

(iii) (2p) $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{\sqrt{2+x}}{\mathrm{arctg}\sqrt{4-x^2}}$

(iv) (2p) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\, x\right)^x$

Zadanie 8. (4p) Dla jakich wartości a, b, c, k funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła na całym zbiorze $\mathbb{R}$, gdy:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{arctg}(bx)}{x}, & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \\ 1, & \text{dla } x = 0 \\ (a+1)\sin(x+\frac{3\pi}{2}), & \text{dla } (0; +\infty) \end{cases}$$

(ii) (3p) Funkcja $f : [1; +\infty) \to \mathbb{R}$ ma wzór $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} - \cos x$. Zbadać jej jednostajną ciągłość na dziedzinie.

(iii) (3p) Pokazać, że równanie $(\sqrt{x}+1)^7 + x - 2 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $(0,1)$ oraz, że jest to jedyne rozwiązanie tego równania w tym zbiorze.

Zadanie 9.

(i) (3p) Dla funkcji $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{\arcsin(x^2)}{x+2}}$ wyznaczyć jej pochodną

(ii) (3p) Na podstawie twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej dla funkcji $f : [0; \pi] \to \mathbb{R}$, gdy $f(x) = \cos x$ wyznaczyć formułę na pochodną jej funkcji odwrotnej.

Zadanie 10.

(i) (4p) Dla funkcji $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ wyznaczyć jej wartości najmniejszą i największą.

(ii) (4p) Dla funkcji $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = \ln x^{27} - \ln^3 x$ wyznaczyć jej ekstrema – o ile istnieją.

Warunki:

- Czas trwania egzaminu 150 minut.
- W przypadku niesamodzielności rozwiązań zadań, każde zadanie z taką usterką będzie ocenione na $(-n)$ punktów, jeśli przysługiwało za nie n punktów.
- Przyjmujemy umowę, że maksymalna liczba punktów będąca podstawą oceny wynosi 50, a ocena pozytywna z egzaminu, to minimum 25 punktów.