Rachunek prawdopodobieństwa - I kolokwium – zestaw 1

1. Między troje dzieci dzielimy dwanaście zabawek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każde dziecko otrzyma dokładnie cztery zabawki?
2. W hotelu są 2 windy I i II. I działa z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, II działa z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Wiadomo, że jeśli nie działa II, to I nie jest zepsuta z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że działa II winda, gdy I jest zepsuta? Jakie jest prawdopodobieństwo, że działa co najmniej jedna winda?
3. Wśród studentów III roku przystępujących do egzaminu 25% jest świetnie przygotowanych (grupa A), połowa przygotowała się częściowo (grupa B), pozostałe 25% zna wymagany materiał bardzo słabo (grupa C). Z grupy A zdaje każdy student, z grupy B - co drugi, z grupy C - co piąty. Losowo wybrany student nie zdał egzaminu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że należy on do grupy B?
4. Z odcinka $[-1, 1]$ wybieramy losowo dwie liczby p i q. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że równanie kwadratowe $x^2 + px + q = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste.
5. Załóżmy, że $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$. Udowodnić, że jeżeli A i B są rozłączne, to nie są niezależne.
6. Pewien matematyk nosi w kieszeni (lewej i prawej) po jednym pudełku zapałek. Ilekroć chce zapalić papierosa, sięga do losowo wybranej kieszeni. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie k zapałek? ($k = 0, 1, 2, \ldots, m$, gdzie m jest liczbą zapałek w pełnym pudełku; zakładamy, że w chwili początkowej matematyk ma dwa pełne pudełka)
7. Niech $\Omega = [0, 3]$, $\mathcal{F} = \sigma$-ciało zbiorów borelowskich na $[0, 3]$, P – unormowana miara Lebesgue'a na Ω i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcja określona następująco:

$$X(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{gdy } \omega \in [0, 1] \\ 1, & \text{gdy } \omega \in (1, 2] \\ 3 - \omega, & \text{gdy } \omega \in (2, 3] \end{cases}$$

   Wykazać, że X jest zmienną losową.