

IAD – Rachunek prawdopodobieństwa – egzamin – zestaw 1

2025-02-03

1. (6 punktów) Przypuśćmy, że pewien owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, a każde z jajeczek wylęga się z prawdopodobieństwem p . Zakładając wzajemną niezależność wylęgania się jaj, znaleźć prawdopodobieństwo, że ilość potomków danego owada wyniesie dokładnie l . Wyznaczyć przeciętną liczbę młodych owadów z pojedynczego wylęgu.
2. (5 punktów) Tygodniowe wypłaty z pewnego funduszu są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z tą samą wartością oczekiwaną 2000 zł. Obliczyć prawdopodobieństwo, że łączna wypłata z tego funduszu w okresie roku, tzn. 52 tygodni, przekroczy 100 000 zł. Podać twierdzenie, które jest podstawą rozwiązania.
3. (5 punktów) Z urny, w której jest pięć kul białych, trzy czerwone i dwie zielone losujemy ze zwracaniem cztery kule. Podać rozkład liczby wylosowanych kul białych, dystrybuantę odpowiedniej zmiennej losowej i jej wartość oczekiwaną.
4. (6 punktów) Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\alpha = 3$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Y = 2X - 3$ oraz funkcję charakterystyczną zmiennej Y . Podać własności funkcji charakterystycznej.
5. (5 punktów) Załóżmy, że X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 2]$. Obliczyć EZ , gdzie $Z = \min(X_1, X_2, X_3)$.
6. (2 punkty) Wielkość dziennego zużycia węgla Z w osiedlowej ciepłowni jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 4,5 i odchyleniem standardowym 1,3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnym dniu Z przekroczy wartość 6?
7. (6 punktów) Niech dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma gęstość:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & \text{dla } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ 0, & \text{poza tym obszarem} \end{cases}$$

Wyznaczyć regresje II rodzaju. Zbadać niezależność zmiennych losowych X, Y . Obliczyć $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Wyjaśnić związki między niezależnością a nieskorelowaniem.