

IAD - Rachunek prawdopodobieństwa - egzamin

zestaw 2

2025-02-10

1. (5 punktów) W partii brydża przed licencją grać A widzi, że nie ma Asy. Jaka jest szansa, że jego partner ma dokładnie 2 asy?
2. (6 punktów) Podczas klasówki z historii Jan i Paweł siedzieli obok siebie. Między innymi mieli napisać dwie daty. Jan je zapamiętał, ale nie wiedział jak je przyporządkować. Zapytał Pawła, wiedząc, że w 3 przypadkach na 4 Paweł zna prawidłowe odpowiedzi, chociaż Paweł uważa, że zawsze wie dobrze. Jednak Paweł w 1 przypadku na 4 oszukuje Jana. Co jest lepsze dla Jana: posłuchać Pawła, czy odpowiedzieć losowo?
3. (3 punkty) Maszyna produkuje części do samochodu. Długość produkowanych części jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(1; 0,3)$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo otrzymania części niezgodnej z normą, jeżeli norma przewiduje długość w granicach $\langle 0,8; 1,2 \rangle$?
4. (5 punktów) Mamy 100 obrabiarek pracujących niezależnie od siebie, o tej samej mocy i tym samym sposobie pracy. Każda z nich jest włączona w ciągu 0,8 całego czasu pracy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dowolnie wybranej chwili będzie włączonych od 70 do 86 obrabiarek? Podaj twierdzenie, które jest podstawą rozwiązania.
5. (6 punktów) Zmienna losowa X ma gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-x} & \text{dla } x \in [0, \ln 3] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, \ln 3] \end{cases}$$

Wyznaczyć parametr α , dystrybuantę zmiennej losowej X , wartość oczekiwaną EX , wariancję $D^2(X)$, funkcję charakterystyczną zmiennej X oraz funkcję gęstości zmiennej $Y = e^X$.

6. (5 punktów) Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco:

$$\begin{aligned} P[X = 1, Y = 1] &= P[X = 2, Y = 1] = P[X = 2, Y = 2] = 0,1, \\ P[X = 1, Y = 2] &= 0,3, \\ P[X = 3, Y = 1] &= 0,3, \\ P[X = 3, Y = 2] &= 0,1 \end{aligned}$$

- a) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
 - b) Wyznaczyć proste regresji II rodzaju.
 - c) Wyznaczyć wartość dystrybuanty $F(x, y)$ w punktach $(1, 1)$, $(3, 2)$.
7. (5 punktów) Pokazać, że jeśli $P(A) = 0,7$ i $P(B) = 0,8$, to $P(A \cap B) \geq 0,5$