

I egzamin poprawkowy z przedmiotu ALGEBRA LINIOWA dla kierunku IAD B

Zadanie 1 (4p) W zbiorze $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ określone jest działanie: $(a, b) \circ (c, d) = \left(\frac{a+c}{2}, bd\right)$. Zbadać, czy struktura algebraiczna $(\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle, \circ)$ jest grupą.

Zadanie 2 (4p) Wiedząc, że wielomian $w(z) = 2z^5 + z^4 + 3z^3 + z - 1$ jest podzielny przez $z^2 + 1$, wielomian ten rozłożyć na: (a) nierozkładalne czynniki rzeczywiste, (b) czynniki liniowe.

Zadanie 3 (4p) W zależności od parametru $b \in \mathbb{R}$ przedyskutować rozwiązalność układu równań:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = b \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Zadanie 4 (4p) Zbadać liniową niezależność wektorów $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Czy tworzą one bazę tej przestrzeni? Proszę uzasadnić odpowiedź.

Zadanie 5 (4p) Dane jest przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (x - 2y, y + z)$. Wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia liniowego L oraz ich wymiary.

Zadanie 6 (2p) Trójka (A, \cdot, \circ) spełnia następujące warunki:

- (a) działanie \cdot jest wewnętrzne w zbiorze A , łączne i posiada element neutralny,
- (b) działanie \circ jest wewnętrzne w zbiorze A , łączne i przemienne,
- (c) działanie \circ jest rozdzielne względem działania \cdot .

Jakie dodatkowe warunki muszą być spełnione, aby struktura (A, \cdot, \circ) tworzyła pierścień przemienny?

Proszę podać warunki, a nie tylko ich nazwy. Proszę podać tylko brakujące warunki.

Zadanie 7 (2p) Definicja pierwiastka stopnia n z liczby zespolonej. Twierdzenie o pierwiastkach z liczby zespolonej.

Zadanie 8 (2p) Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu.

Zadanie 9 (2p) Definicja podprzestrzeni przestrzeni wektorowej.

Zadanie 10 (2p) Definicja przekształcenia liniowego oraz obrazu przekształcenia liniowego.