

Tematy II-go kolokwium z Analizy matematycznej I dla grupy 1.1 kierunku
Inżynieria i Analiza Danych

POLITECHNIKA LUBELSKA

23 stycznia 2023 roku

Zadanie 1. (3 p.) Z definicji granicy funkcji w punkcie pokazać, że $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 5x + 6} = -6$.

Zadanie 2. (3 p.) Pokazać, że równanie $x^3 + x + \cos^2 x = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $x \in (-1, 0)$.

Zadanie 3. (8 p.) Zbadać istnienie granic:

- (i) (2 p.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$
- (ii) (3 p.) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right)$
- (iii) (3 p.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)}$

Zadanie 4. (5 p.) Znaleźć maksymalne przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mającej wzór $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

Zadanie 5. (6 p.) Wykonać następujące polecenia:

- (i) (3 p.) zbadać jednostajną ciągłość funkcji $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ na przedziale $[1, +\infty)$
- (ii) (3 p.) wyznaczyć wartości parametrów $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w całej swojej dziedzinie

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{gdy } x \leq 1, \\ ax^2 + c & \text{gdy } 1 < x \leq 2, \\ \frac{dx^2+1}{x} & \text{gdy } x > 2. \end{cases}$$

Zadanie 6. (5 p.) Dla funkcji $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli $f(x) = x + 2\sqrt{|x-2|} - 3$, wyznaczyć jej wartość najmniejszą i największą.

Zadanie 7. (9 p.) Wykonać następujące polecenia:

- (i) (3 p.) korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej znaleźć pochodną funkcji odwrotnej do $f(x) = \cos x$ dla $x \in (0, \pi)$
- (ii) (3 p.) korzystając z definicji pochodnej funkcji w punkcie wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$
- (iii) (3 p.) obliczyć pochodną funkcji $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, gdy $f(x) = (\ln x)^2$

Zadanie 8. (9 p.) Zbadać zbieżność szeregów, dla $n \in \mathbb{N}_+$:

- (i) (3 p.) $\sum \frac{n^5}{2^n + 3^n}$
- (ii) (3 p.) $\sum 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$
- (iii) (3 p.) $\sum (-1)^{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)$

Zadanie 9. (4 p.) Znaleźć wzór ogólny oraz zbadać istnienie granicy ciągu określonego rekurencyjnie

$$a_n = \begin{cases} 5 & \text{dla } n = 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{dla } n = 1, \\ \frac{1}{4}a_{n-1} + \frac{1}{8}a_{n-2} & \text{dla } n \geq 2. \end{cases}$$

Zadanie 10. (3 p.) Znaleźć sumę szeregu $\sum \frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

Warunki:

- (i) Czas trwania kolokwium 150 minut.
- (ii) W czasie trwania kolokwium nie wolno korzystać z telefonów komórkowych, smartwaczy, pomocy naukowych i kalkulatorów. Odstępstwo od tych zasad lub niesamodzielność przy pisaniu pracy spowoduje regulaminowe konsekwencje.
- (iii) Przyjmujemy umowę, że maksymalna liczba punktów wynosi 50.