

I kolokwium z przedmiotu **Analiza matematyczna II**, grupa **IAD1 2.3**

15.04.2025 r.

Zadanie 1. (10p) Obliczyć całki nieoznaczone:

(i) $\int \sin(2x) (\sqrt[3]{e})^{\sin x} dx,$

(ii) $\int \frac{x+4}{(x^2+2x+1)(x^2+1)} dx.$

Zadanie 2. (10p) Obliczyć całki oznaczone:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4+\cos x}{2-\cos x} dx,$

(ii) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-4}} dx.$

Zadanie 3. (10p) Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez 3 krzywe o równaniach: $x = \sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}$, $y = \frac{4}{x^2}$, $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$. Wykonać rysunek oraz opisać odpowiednie obszary normalne.

Zadanie 4. (10p) Zbadać zbieżność całek:

(i) $\int_3^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^6-10x}},$

(ii) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+3x)} dx.$

Zadanie 5. Dla funkcji $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wyrażonych wzorami

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2) \cdot \cos(y^2)}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y + 1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, & (x, y) \neq (0, 1) \\ 0, & (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

(i) (5p) Zbadać istnienie granic iterowanych oraz granicy podwójnej funkcji f w punkcie $(0, 0)$.

(ii) (5p) Znaleźć pochodną kierunkową funkcji g w kierunku dowolnego wektora $\mathbf{a} = [a_1, a_2]$ w punkcie $(0, 1)$ oraz gradient funkcji w tym punkcie.