

# IAD – Rachunek prawdopodobieństwa – egzamin – zestaw 1

2025-02-03

1. (6 punktów) Przypuśćmy, że pewien owad składa  $k$  jajeczek z prawdopodobieństwem  $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ , a każde z jajeczek wylęga się z prawdopodobieństwem  $p$ . Zakładając wzajemną niezależność wylęgania się jaj, znaleźć prawdopodobieństwo, że ilość potomków danego owada wyniesie dokładnie  $l$ . Wyznaczyć przeciętną liczbę młodych owadów z pojedynczego wylęgu.
2. (5 punktów) Tygodniowe wypłaty z pewnego funduszu są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z tą samą wartością oczekiwaną 2000 zł. Obliczyć prawdopodobieństwo, że łączna wypłata z tego funduszu w okresie roku, tzn. 52 tygodni, przekroczy 100 000 zł. Podać twierdzenie, które jest podstawą rozwiązania.
3. (5 punktów) Z urny, w której jest pięć kul białych, trzy czerwone i dwie zielone losujemy ze zwracaniem cztery kule. Podać rozkład liczby wylosowanych kul białych, dystrybuantę odpowiedniej zmiennej losowej i jej wartość oczekiwaną.
4. (6 punktów) Zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\alpha = 3$ . Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej  $Y = 2X - 3$  oraz funkcję charakterystyczną zmiennej  $Y$ . Podać własności funkcji charakterystycznej.
5. (5 punktów) Załóżmy, że  $X_1, X_2, X_3$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[0, 2]$ . Obliczyć  $EZ$ , gdzie  $Z = \min(X_1, X_2, X_3)$ .
6. (2 punkty) Wielkość dziennego zużycia węgla  $Z$  w osiedlowej ciepłowni jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 4,5 i odchyleniem standardowym 1,3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnym dniu  $Z$  przekroczy wartość 6?
7. (6 punktów) Niech dwuwymiarowy wektor losowy  $(X, Y)$  ma gęstość:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & \text{dla } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ 0, & \text{poza tym obszarem} \end{cases}$$

Wyznaczyć regresje II rodzaju. Zbadać niezależność zmiennych losowych  $X, Y$ . Obliczyć  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Wyjaśnić związki między niezależnością a nieskorelowaniem.