
EGA: Notatki z przedmiotu Elementy Geometrii Analitycznej

2023-10-25 – 2024-01-17

Spis treści

Przedmowa	2
1 Iloczyn mieszany	3
2 Prosta i płaszczyzna w \mathbb{R}^3	5
2.1 Przykład	6
2.2 Płaszczyzna w \mathbb{R}^3	7
2.3 Równanie odcinkowe	8
2.4 Pęk płaszczyzn	10
3 Przekształcenia afiniczne w przestrzeni Euklidesowej	12
3.1 Odwzorowanie liniowe	13
3.2 Zapis odwzorowania liniowego we współrzędnych wektorowych	13
3.3 Warunek na automorfizm	14
3.4 Odwzorowanie indukowane	14
3.5 Postać ogólna przekształcenia afinicznego	15
3.6 Odwzorowanie w E^3 i E^2	15
3.7 Własności przekształceń afinicznych	16
3.8 Twierdzenie	18
3.9 Zmiana orientacji	18
3.10 Przykłady przekształceń afinicznych	19
3.11 Izometrie przestrzeni Euklidesowej punktowej	19
3.12 Odległość euklidesowa	20
3.13 Izometria	20
3.14 Zapis izometrii we współrzędnych ortonormalnych	21
4 Krzywa stożkowa	23
4.1 Definicje	23
4.2 Postaci krzywej stożkowej	24
4.3 Obliczenie współczynników równania kanonicznego krzywej drugiego stopnia	24

Przedmowa

To są notatki z przedmiotu Elementy Geometrii Analitycznej prowadzonego na kierunku IAD w 2023/2024 roku przez dr Magdalenę Sobczak-Kneć. Treści obejmują 6 wykładów.

Notatki znajdują się w **domenie publicznej** na warunkach licencji CC0 1.0 Universal¹. Kod źródłowy można znaleźć w repozytorium na GitHub <https://github.com/wmit-materialy/notatki>

¹<https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.pl>

2023-10-25

1 Iloczyn mieszany

Iloczyn mieszany Iloczynem mieszanym trójki wektorów $\vec{a}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy **liczbę** określoną w następujący sposób

$$(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$$

$$\vec{u} = [u_1, u_2, u_3],$$

Dla wektorów w \mathbb{R}^3 $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, zachodzi równość

$$\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$$

$$(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Własności iloczynu mieszanego wynikają bezpośrednio z własności iloczynów wektorowego i skalarowego

Achtung! 1

Z definicji wynika, że długość iloczynu wektorowego wektorów \vec{u} i \vec{v} jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez wektory \vec{u}, \vec{v} .

Z kolei liczba $|(\vec{u}\vec{v}\vec{w})|$ jest równa objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach.

Liczba $\frac{1}{6}|(\vec{u}\vec{v}\vec{w})|$ jest równa objętości czworościanu rozpiętego przez wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Twierdzenie 1.1

Wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn $(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = 0$

Przykład 1.1

Dane są trzy wierzchołki czworościanu $A(4, 0, -2), B(6, -2, 2), C(4, -4, 6)$. Wyznacz czwarty wierzchołek D wiedząc, że leży on na osi oy , a objętość czworościanu jest równa 40.

$$D \in OY \iff D(0, y, 0)$$

$$V = 40$$

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$$

$$\vec{AB} = [2, -2, 4]$$

$$\vec{AC} = [0, -4, 8]$$

$$\vec{AD} = [-4, y, 2]$$

$$\begin{aligned} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| &= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ -4 & y & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ y & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & y \end{vmatrix} \\ &= 2(-8 - 8y) + 2(0 + 32) + 4(0 - 16) = -16 - 16y + 64 - 64 = -16 - 16y \end{aligned}$$

$$\left(V = \frac{1}{6} |-16 - 16y| \right) \wedge (V = 40) \implies \frac{1}{6} |-16 - 16y| = 40$$

$$|16 + 16y| = 240$$

$$16 + 16y = 240 \vee 16 + 16y = -240$$

$$y = 14 \vee y = -16$$

$$D_1(0, 14, 0)$$

$$D_2(0, -16, 0)$$

$$\frac{1}{6} (\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{h}$$

$$h = \frac{(\vec{u}\vec{v}\vec{w})}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Równoległości

$$V = P_p \cdot h$$

$$V = |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot h$$

z drugiej strony

$$V = |(\vec{u}\vec{v}\vec{w})|$$

$$h = \frac{|(\vec{u}\vec{v}\vec{w})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

2 Prosta i płaszczyzna w \mathbb{R}^3

Prosta w \mathbb{R}^3 o wektorze kierunkowym $\vec{v} \neq \vec{0}$ przechodzącą przez punkt A nazywamy zbiór $p = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = A + t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}\}$

Prostą przechodzącą przez dwa punkty A, B różne od siebie rozumiemy jako prostą o wektorze kierunkowym \overrightarrow{AB} i przechodzącą przez punkt A

Równanie parametryczne Jeżeli punkt A ma współrzędne $A(a_1, a_2, a_3)$, zaś wektor \vec{v} ma współrzędne $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$, to równanie prostej p możemy zapisać w postaci

$$p \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \\ x_3 = a_3 + tv_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie prostej p , które nazywamy równaniem parametrycznym

Równanie kierunkowe Z równań parametrycznych prostej można formalnie wyliczyć parametr t i porównując ze sobą otrzymać:

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3} = t.$$

Równanie powyższe określamy jako równanie kierunkowe prostej p .

Achtung! 2

Dla prostej w \mathbb{R}^3 nie istnieje równanie ogólne (np jak dla prostej w \mathbb{R}^2 : $y = kx + b$)

2.1 Przykład

Przykład 2.1

znaleźć równania prostej przechodzącej przez punkt $A(0, 0, -2)$ i prostopadłej do wektorów $\vec{a} = [0, 1, -5]$ i $\vec{b} = [-2, 3, 0]$

Wektor kierunkowy \vec{v} możemy przyjąć wektor $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \text{rachunek wyniku} = 15\vec{i} + 10\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$p \begin{cases} x_1 = 15t \\ x_2 = 10t \\ x_3 = -2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}..$$

Równanie kierunkowe

$$\frac{x_1}{15} = \frac{x_2}{10} = \frac{x_3 + 2}{2}$$

Achtung! 3

Jeżeli wektor kierunkowy ma wśród współrzędnych zero np. $\vec{v} = [v_1, v_2, 0]$, $A(a_1, a_2, a_3)$, to równanie kierunkowe ma postać

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{0}.$$

Zaś parametryczne ma postać

$$p \begin{cases} x_1 = v_1 t + a_1 \\ x_2 = v_2 t + a_2 \\ x_3 = a_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.2 Płaszczyzna w \mathbb{R}^3

Płaszczyzna w \mathbb{R}^3 Ustalmy w \mathbb{R}^3 punkt A i dwa wektory \vec{u}, \vec{v} liniowo niezależne. Płaszczyznę π w \mathbb{R}^3 przechodzącą przez punkt A i rozpiętą przez niewspółliniowe wektory \vec{u}, \vec{v} nazywamy zbiór

$$\pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}; t, s \in \mathbb{R}\}$$

Płaszczyznę wyznaczoną przez trzy niewspółliniowe punkty A, B, C rozumiemy będziemy jako płaszczyznę rozpiętą przez wektor \vec{AB}, \vec{AC}

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Równanie parametryczne Zapiszemy we współrzędnych $X(x_1, x_2, x_3)$, $A(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$:

$$\pi = \begin{cases} x_1 = a_1 + tu_1 + sv_1 \\ x_2 = a_2 + tu_2 + sv_2 \\ x_3 = a_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Otrzymaliśmy równanie parametryczne płaszczyzny

Kolejnym z równań płaszczyzny jest tzw. równanie wyznacznikowe w \mathbb{R}^3

Równanie wyznacznikowe Zauważmy, że płaszczyznę w \mathbb{R}^3 przechodzącą przez punkt A i rozpiętą przez niewspółliniowe wektory \vec{u}, \vec{v} możemy opisać warunkiem

$$(\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0.$$

zapisując we współrzędnych

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwijając względem pierwszego wiersza mamy:

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & x_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (x_1 - a_1) \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_A + (x_2 - a_2) \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_B + (x_3 - a_3) \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_C.$$

$$D = a_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Równanie ogólne Porządkując otrzymujemy równanie postaci $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$, które nazywamy równaniem ogólnym płaszczyzny w \mathbb{R}^3

Wektor normalny płaszczyzny Zauważmy, że współrzędne A, B, C są w równaniu ogólnym współrzędnymi wektora $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ prostopadłego do płaszczyzny π . Wektor ten nazywamy wektorem normalnym płaszczyzny π

2023-11-08

2.3 Równanie odcinkowe

Równanie normalne płaszczyzny π odcinającej na osiach ox, oy, oz układu współrzędnych odcinki zorientowane $a, b, c \neq 0$ ma postać

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Przykład 2.2

Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek odcinka \overrightarrow{AB} , gdzie $A(3, 2, -1)$ i $B(5, 0, 7)$ i prostopadłej do tego odcinka

$$\pi \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = [2, -2, 8]$$

$$S : \begin{cases} x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = 4 \\ y_S = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \\ z_S = \frac{z_A + z_B}{2} = 3 \end{cases} \text{ - punkt przecięcia płaszczyzny prostą}$$

Równanie Ogólne

$$\pi. 2(x - 4) - 2(y - 1) + 8(z - 3) = 0$$

$$x - 4 - y + 1 - 4z - 12 = 0$$

$$\pi. x - y + 4z - 15 = 0$$

Równanie odcinkowe

$$x - y + 4z - 15 = 0$$

$$x - y + 4z = 15$$

$$\frac{x}{15} + \frac{y}{-15} + \frac{z}{\frac{15}{4}} = 1$$

Przykład 2.3

Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(0,0,0)$ oraz równoległej do wektorów $\vec{u} = [1, 2, 3]$ i $\vec{v} = [0, -1, 2]$

Równanie parametryczne płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot s \\ y = 0 + 2 \cdot t + -1 \cdot s \\ z = 0 + 3 \cdot t + 2 \cdot s \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\pi : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \cdot t + -1 \cdot s \\ z = 3 \cdot t + 2 \cdot s \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Znajdziemy wektor normalny $\vec{n} : \vec{n} \perp \pi$. Ponieważ $(\vec{u} \parallel \pi) \wedge (\vec{v} \parallel \pi)$, to $(\vec{n} \perp \vec{u}) \wedge (\vec{n} \perp \vec{v})$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \dots \text{obliczenia} \dots = 7\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{n} = [7, -2, -1]$$

$$\pi : 7x - 2y - z = 0$$

2.4 Pęk płaszczyzn

Pęk płaszczyzn równoległych w \mathbb{R}^3 nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn równoległych do danej płaszczyzny

Pękiem płaszczyzn przecinających się wzduż krawędzi p nazywamy zbiór wszystkich płaszczyzn zawierających prostą p

Jeżeli $\pi_1 : A_1x + A_2y + A_3z + A_4 = 0$
 $\pi_2 : B_1x + B_2y + B_3z + B_4 = 0$ są płaszczyznami przecinającymi się, to

$$p : \begin{cases} \pi_1 : A_1x + A_2y + A_3z + A_4 = 0 \\ \pi_2 : B_1x + B_2y + B_3z + B_4 = 0 \end{cases}$$

przedstawia równanie krawędziowe prostej p , będącej częścią wspólną π_1 i π_2

Przykład 2.4

Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(2, -1, 1)$ i prostopadłej do prostej

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 & \vec{n}_1 = [1, -2, 1] \\ x + y - z + 2 & \vec{n}_2 = [1, 1, -1] \end{cases}$$

$$\vec{n}_1 \perp p \wedge \vec{n}_2 \perp p$$

Wektor kierunkowy prostej p jest prostopadły do \vec{n}_1 i \vec{n}_2

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots \text{obliczenia} \dots = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{v} = [1, 2, 3]$$

Niech $y = 0$

$$+ \begin{cases} x + 2 = 3 \\ x - 2 = -2 \end{cases}$$

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2z = 5$$

$$z = \frac{5}{2}$$

Równanie parametryczne prostej p

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 2t \\ z = \frac{5}{2} + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Szukana płaszczyzna $\perp p$

$$\vec{n}_\pi = v_p \perp \pi$$

$$\pi : (x - 2) + 2(y + 1) + 3(z - 1) = 0$$

$$\underline{x + 2y + 3z - 3 = 0}$$

Przykład 2.5

Obliczyć odległość punktów $P_0(3, 4, 2)$ od prostej

$$l : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$|\overrightarrow{PP_0}| = d$$

Napiżemy równanie płaszczyzny π takiej, że

$$P_0 \in \pi \wedge \pi \perp l$$

$$\vec{v}_l = [1, 1, -3] = \vec{n}_\pi$$

$$\begin{aligned} \pi : \quad & (x - 3) + (y - 4) + (z - 2) = 0 \\ & x + y - 3z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Punkt P będący rzutem punktu P_0 na prostą l jest punktem wspólnym płaszczyzny π i prostej l (punkt przecięcia płaszczyzny prostej l)

$$\begin{aligned} -2 + t + 1 + t - 3(3 - 3t) - 1 &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$P(-1, 2, 0)$$

$$d(P_0, l) = |PP_0| = \sqrt{(3+1)^2 + (4-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{164+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

3 Przekształcenia afiniczne w przestrzeni Euklidesowej

Niech X będzie zbiorem $f : X \rightarrow X$ nazwiemy przekształceniem jeżeli funkcja ta jest iniekcją (funkcją różnowartościową) i jest surjekcją, to znaczy jest bijekcją

Rozważmy następujące odwzorowanie przestrzeni euklidesowej $f : E^n \rightarrow E^n$ w siebie. Jeżeli odwzorowanie $f_* : TE^n \rightarrow TE^n$ (zbiór wektorów swobodnych określonych na przestrzeni E^n)

$$[\overrightarrow{XY}] \rightarrow [f(X)f(Y)]$$

jest określone poprawnie w tym sensie, że nie zależy od wyboru reprezentanta \overrightarrow{XY} wektora swobodnego $[\overrightarrow{XY}]$ to nazywamy je odwzorowaniem indukowanym odwzorowania f . Gdy f_* jest automorfizmem przestrzeni wektorowej TE^n , to f nazywamy przekształceniem afinicznym przestrzeni euklidesowej E^n

2023-11-22

3.1 Odwzorowanie liniowe

Rozważmy dwie przestrzenie wektorowe V, W .

Odwzorowanie liniowe Odwzorowaniem liniowym $A : V \rightarrow W$ nazwiemy odwzorowanie, które spełnia warunki:

1. addytywność

$$\bigwedge_{v_1, v_2 \in V} A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$$

2. jednorodność

$$\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} \bigwedge_{v \in V} A(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot A(v)$$

Izomorfizm liniowy Izomorfizmem liniowym nazywamy odwzorowanie liniowe $A : V \rightarrow W$, które jest bijekcją

Automorfizm liniowy Automorfizmem liniowym nazywamy izomorfizm liniowy $A : V \rightarrow V$. Innymi słowy taki izomorfizm liniowy $A : V \rightarrow W$, że $V = W$

3.2 Zapis odwzorowania liniowego we współrzędnych wektorowych

Ustawmy w przestrzeniach wektorowych V, W bazy odpowiednio $V\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ i $W\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$

$$\bar{v} = v_1 \bar{a}_1 + v_2 \bar{a}_2 + \dots + v_n \bar{a}_n$$

$$\begin{aligned} A(\bar{v}) &= A(v_1 \bar{a}_1 + v_2 \bar{a}_2 + \dots + v_n \bar{a}_n) \\ &\stackrel{\text{addytywność}}{=} A(v_1 \bar{a}_1) + A(v_2 \bar{a}_2) + \dots + A(v_n \bar{a}_n) \\ &\stackrel{\text{jednorodność}}{=} v_1 A(\bar{a}_1) + v_2 A(\bar{a}_2) + \dots + v_n A(\bar{a}_n) \end{aligned}$$

Każde odwzorowanie liniowe jest jednoznacznie określone przez podanie jego wartości na wektorach pewnej bazy przestrzeni wektorowej V , tzn $A(\bar{a}_1), \dots, A(\bar{a}_n)$

Każdy z tych wektorów jako wektor przestrzeni W da się zapisać przy użyciu bazy $B(\bar{a}_1), \dots, B(\bar{a}_n)$

$$\begin{aligned}
 A(\bar{a}_1) &= a_{11}\bar{b}_1 + a_{12}\bar{b}_2 + \dots + a_{1n}\bar{b}_n \\
 A(\bar{a}_2) &= a_{21}\bar{b}_1 + a_{22}\bar{b}_2 + \dots + a_{2n}\bar{b}_n \\
 &\vdots \\
 A(\bar{a}_n) &= a_{n1}\bar{b}_1 + a_{n2}\bar{b}_2 + \dots + a_{nn}\bar{b}_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
 \end{bmatrix}$$

3.3 Warunek na automorfizmem

Odwzorowanie A jest automorfizmem, jeżeli wyznacznik macierzy odwzorowania jest różny od zera.

Można podać macierzy zapis odwzorowania liniowego

$$A(\bar{v}) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

gdzie

$$A(\bar{v}) = \bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

3.4 Odwzorowanie indukowane

Na podstawie definicji przekształcenia afinicznego odwzorowanie indukowane f_* tego przekształcenia jest określone wzorem:

$$f_*([\overline{AB}]) = [\overline{f(A)f(B)}]$$

3.5 Postać ogólna przekształcenia afinicznego

W przestrzeni euklidesowej n -wymiarowej E^n ustalmy dwa punkty $O, X \in E^n$. Wtedy dla przekształcenia afinicznego $f : E^n \rightarrow E^n$ mamy $f_*([\overline{OX}]) = [\overline{f(O)f(X)}]$

Wykorzystując afinicznej sumy (punktu i wektora) powyższą równość możemy zapisać w postaci

$$f(X) = f(O) + f_*([\overline{OX}])$$

Otrzymany zapis nazywamy postacią ogólną przekształcenia afinicznego

3.6 Odwzorowanie w E^3 i E^2

Pokażemy że każde przekształcenie afiniczne można zapisać przy użyciu współrzędnych afinicznych przestrzeni Euklidesowej

Ustalmy w E^3 afiniczny układ współrzędnych $\{0, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$

Zapiszemy odwzorowanie indukowane f_* :

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}\bar{v}_1 + a_{12}\bar{v}_2 + a_{13}\bar{v}_3 \\ w_2 = a_{21}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + a_{23}\bar{v}_3 \\ w_3 = a_{31}\bar{v}_1 + a_{32}\bar{v}_2 + a_{33}\bar{v}_3 \end{cases}$$

Ponieważ f_* jest automorfizmem, to

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Stąd otrzymujemy zapis przekształcenia afinicznego

$$f(X) = f(O) + f_*([\overline{OX}])$$

w postaci następującej:

$$f(X) = Y$$

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 \\ y_2 = a_2 + a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 \\ y_3 = a_3 + a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 \end{cases}$$

Jeżeli rozpatrujemy przestrzeń E^2 , to odwzorowanie afiniczne jest postaci

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 \\ y_2 = a_2 + a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 \end{cases}$$

Przykład 3.1

Pokazać, że $f : E^2 \rightarrow E^2$ dane wzorem:

$$f : \begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

przeprowadza prostą $p : \begin{cases} x_1 = p_1 + tv_1 \\ x_2 = p_2 + tv_2 \end{cases}$ w zbiór, który jest prostą

$$\begin{aligned} f(p) : \begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11}(p_1 + tv_1) + a_{12}(p_2 + tv_2) \\ y_2 = a_2 + a_{21}(p_1 + tv_1) + a_{22}(p_2 + tv_2) \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11} \cdot p_1 + a_{11} \cdot tv_1 + a_{12} \cdot p_2 + a_{12} \cdot tv_2 \\ y_2 = a_2 + a_{21} \cdot p_1 + a_{21} \cdot tv_1 + a_{22} \cdot p_2 + a_{22} \cdot tv_2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11} \cdot p_1 + a_{12} \cdot p_2 + t(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) \\ y_2 = a_2 + a_{21} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 + t(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) \end{cases} \end{aligned}$$

$f(p)$ przechodzi przez punkt $(a_1 + a_{11} \cdot p_1 + a_{12} \cdot p_2, a_2 + a_{21} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2)$

$$\vec{w} = [a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2]$$

3.7 Własności przekształceń afinicznych

I. Przekształcenia afiniczne przeprowadzają proste w proste, a płaszczyzny w płaszczyzny.

- II. Przekształcenie afiniczne zachowuje równoległość prostych i płaszczyzn.
 III. Przekształcenie afiniczne zachowuje stosunek podziału pary punktów (lub wektora), tzn.

$$\lambda_{AB}(C) = \lambda_{f(A)f(B)}(f(C))$$

W szczególności środek odcinka AB przechodzi w środek odcinka $f(A)f(B)$

- IV. Przekształcenie afiniczne jest bijekcją.
 V. Przekształcenie odwrotne do przekształcenia afinicznego jest przekształceniem afinicznym przy czym:

$$(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$$

- VI. Jednością w grupach przekształceń afinicznych jest przekształcenie identycznościowe $I : E^n \rightarrow E^n$, takie, że $I(X) = I(O) + I_*(\overline{OX}) = X$
 VII. Złożenie przekształceń afinicznych jest przekształceniem afinicznym, przy czym

$$(f \circ g)_* = (f_* \circ g_*)$$

- VIII. Składanie przekształceń afinicznych jest działaniem łącznym, tzn:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

- IX. Jeżeli w E^2 dane są trzy punkty A, B, C niewspółliniowe oraz trzy punkty D, E, F niewspółliniowe, to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie afiniczne $f : E^2 \rightarrow E^2$, takie, że
- $$\begin{aligned} f(A) &= D \\ f(B) &= E \\ f(C) &= F \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

w E^3 jeżeli dane są dwa układy punktów $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ i $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ niewspółliniowe, to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie afiniczne $f : E^3 \rightarrow E^3$, takie, że $f(A_1) = B_1, f(A_2) = B_2, f(A_3) = B_3, f(A_4) = B_4$

3.8 Twierdzenie

Twierdzenie 3.1

Przekształcenia afiniczne $f : E^2 \rightarrow E^2$ postaci

$$f : \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 \end{cases}$$

Zmieniają pole równoległoboków w skali

$$k = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\text{wartość bezwzględna z wyznacznika}}$$

Twierdzenie 3.2

Przekształcenia afiniczne $f : E^3 \rightarrow E^3$ postaci

$$f : \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_3 \end{cases}$$

zmienia objętość równoległościanu (ewentualnie czworościanu) w skali

$$k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3.9 Zmiana orientacji

Mówimy, że przekształcenie afiniczne f zachowuje orientację jeżeli jego przekształcenie indukowane f_* przeprowadza każdą bazę w bazę zgodnie zorientowaną, natomiast f zmienia orientację jeżeli f_* przeprowadza każdą bazę w bazę zorientowaną przeciwnie.

Można udowodnić, że $[a_{ij}]$ jest macierzą odwzorowania afinicznego, to

1. f zachowuje orientację gdy $\det[a_{ij}] > 0$
2. f zmienia orientację gdy $\det[a_{ij}] < 0$

3.10 Przykłady przekształceń afinicznych

Przykład 3.2

Tożsamość w E^2

$$f : \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{macierz jednostkowa}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Przykład 3.3

Translacja o wektor $\vec{v} = [v_1, v_2]$ w E^2

$$f : \begin{cases} y_1 = x_1 + v_1 \\ y_2 = x_2 + v_2 \end{cases}$$

Przykład 3.4

Symetria względem prostej w E^2 lub względem punktu w E^3 jest przekształceniem afinicznym

Przykład 3.5

Jednokładność w skali k względem punktu O który jest początkiem afinicznego układu współrzędnych jest przekształceniem afinicznym

Przykład 3.6

Obrót w E^2 dookoła punktu O o kąt α jest odwzorowaniem afinicznym

3.11 Izometrie przestrzeni Euklidesowej punktowej

Niech $(E^n, TE^n, \circ, \rightarrow)$ będzie przestrzenią euklidesową punktową, gdzie

E^n	zbiór punktów ($n = 2 \vee n = 3$)
TE^n	przestrzeń wektorowa ($n = 2 \vee n = 3$) wektorów swobodnych
$\rightarrow: E^n \times E^n \rightarrow TE^n$	odwzorowanie punktów
$\circ: TE^n \times TE^n \rightarrow \mathbb{R}$	iloczyn skalarny

3.12 Odległość euklidesowa

Jeżeli $X, Y \in E^2$ ($X, Y \in E^3$) są punktami oraz $\vec{u} = Y - X = \overrightarrow{XY}$ wtedy odległość euklidesowa punktów X, Y jest liczbą oznaczaną $d_E(X, Y) = |\overrightarrow{XY}| = |\vec{u}|$

Jeżeli $X(x_1, x_2), Y(y_1, y_2)$ lub odpowiednio $X(x_1, x_2, x_3), Y(y_1, y_2, y_3)$ to

$$d_E(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \text{ lub } d_E(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$$

3.13 Izometria

Izometrią przestrzeni euklidesowej E^2 lub E^3 nazywamy przekształcenie afiniczne $f : E^2 \rightarrow E^2$ lub $f : E^3 \rightarrow E^3$ zachowujące odległości między punktami, tzn.

$$d_E(X, Y) = d_E(f(X), f(Y))$$

Twierdzenie 3.3

Następujące warunki opisujące izometrię są sobie równoważne

- 1 $\bigwedge_{X, Y \in E^n} d_E(X, Y) = d_E(f(X), f(Y))$
- 2 $\bigwedge_{\vec{v} \in TE^n} |\vec{v}| = |f_*(\vec{v})|$
- 3 $\bigwedge_{\vec{u}, \vec{v} \in TE^n} (\vec{u} \circ \vec{v}) = (f(\vec{u}) \circ f(\vec{v}))$

Dowód 3.1

Niech $X, Y \in E^n$ i $\vec{v} = \overrightarrow{XY}$.

Udowodnimy (1) \iff (2)

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{XY}| = d_E(X, Y)$$

$$|f_*(\vec{v})| = |f_*(\overrightarrow{XY})| = |\overrightarrow{f(Y) - f(X)}| = d_E(f(X), f(Y))$$

udowodnimy (2) \iff (3)

I. Najpierw pokażemy, że (3) \implies (2)

$$\text{Jest oczywiste wystarczy zauważyć, że } |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}} \stackrel{3}{=} \sqrt{f_*(\vec{v}) \circ f_*(\vec{v})} = |f_*(\vec{v})|$$

II. Pokażemy, że 2 \Rightarrow 3

Aby udowodnić tę implikację, wykorzystamy wzór wyrażający iloczyn skalarny tylko przy pomocy długości wektora, tzn.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \frac{1}{2} [|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2]$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \circ \vec{v} &= \frac{1}{2} [|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2] \\ &= \frac{1}{2} [|f_*(\vec{u})|^2 + |f_*(\vec{v})|^2 - |f_*(\vec{u}) - f_*(\vec{v})|^2] \\ &= f_*(\vec{u}) \circ f_*(\vec{v}) \end{aligned}$$

CND

3.14 Zapis izometrii we współrzędnych ortonormalnych

Skoro izometria jest odwzorowaniem afinicznym, to można ją zapisać w postaci

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + a_i \quad i = 1, 2 \vee i = 1, 2, 3$$

$$E^2 : \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 \end{cases}$$

$$E^3 : \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_3 \end{cases}$$

Musimy dołożyć warunki określające izometrię:

$$(\vec{u} \circ \vec{v}) = f_*(\vec{u}) \circ f_*(\vec{v})$$

Niech $\vec{u} = [u_1, u_2]$ i wektor $\vec{v} = [v_1, v_2]$ wtedy

$$f_*(\vec{u}) = f_*([u_1, u_2]) = (a_{11}u_1 + a_{12}u_2, a_{21}u_1 + a_{22}u_2)$$

$$f_*(\vec{v}) = f_*([v_1, v_2]) = (a_{11}v_1 + a_{12}v_2, a_{21}v_1 + a_{22}v_2)$$

Warunek określający izometrię przyjmie postać

$$\begin{aligned} (*) \vec{u} \circ \vec{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 = f_*(\vec{u}) \circ f_*(\vec{v}) \\ &= (a_{11}u_1 + a_{12}u_2) \cdot (a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + (a_{21}u_1 + a_{22}u_2) \cdot (a_{21}v_1 + a_{22}v_2) \end{aligned}$$

Przekształcając prawą stronę powyższej równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 u_1 v_1 + a_{12} a_{11} \cdot u_2 v_1 + a_{11} \cdot a_{12} u_1 v_2 + a_{12}^2 u_2 v_2 \\ &+ a_{21}^2 u_1 v_1 + a_{22} a_{21} u_2 v_1 + a_{21} a_{22} u_1 v_2 + a_{22}^2 u_2 v_2 \\ &= (a_{11}^2 + a_{21}^2) u_1 v_1 + (a_{12}^2 + a_{22}^2) u_2 v_2 \\ &+ (a_{12} \cdot a_{11} + a_{22} a_{21}) u_2 v_1 + (a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22}) u_1 v_2 \end{aligned}$$

Uwzględniając równość (*) otrzymujemy układ równań:

$$(*) : \begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{12} a_{11} + a_{22} a_{21} = 0 \\ a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 \end{cases}$$

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ powyższy układ możemy zapisać w postaci $A^t \cdot A = I$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 & a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{12} \cdot a_{11} + a_{22} a_{21} = 0 & a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz spełniającą ten warunek nazywamy macierzą ortogonalną

Warunki z układu (*) są niezależne i rozwiązanie tych równań można zapisać w postaci

1. $a_{11} = \cos \alpha, a_{21} = \sin \alpha, \quad \alpha \in (0, 2\pi)$
2. $a_{21} = \cos \beta, a_{22} = \sin \beta, \quad \beta \in (0, 2\pi)$

Wtedy ostatni warunek przyjmuje postać:

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta = 0 \iff \sin(\alpha + \beta) = 0$$

$$\alpha + \beta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha + \beta = \pi, \quad \alpha + \beta = 2\pi, \quad \alpha + \beta = 3\pi$$

czyli

$$\alpha = \pi - \beta, \quad \alpha = 2\pi - \beta$$

2024-01-17

4 Krzywa stożkowa

4.1 Definicje

Wartość własna macierzy Wartości własne obliczamy jako λ ze wzoru

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

gdzie M – macierz dla której wyznaczamy wartości własne, I – macierz jednostkowa

Twierdzenie 4.1

Wartości własne λ_1, λ_2 macierzy stożkowej M zawsze są rzeczywiste i nie zależą od wyboru ortonormalnego układu współrzędnych w którym zapisano równanie stożkowej

Ślad macierzy Śladem (ang. trace) $\text{tr } A$ macierzy kwadratowej A nazywamy sumę elementów na głównej przekątnej

$$\text{tr } A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

4.2 Postaci krzywej stożkowej

Postać ogólna krzywej stożkowej

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Zapisując w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C/2 & D/2 \\ C/2 & B & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\tilde{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & C/2 & D/2 \\ C/2 & B & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}}_{\text{macierz duża}} \quad A = \underbrace{\begin{bmatrix} A & C/2 \\ C/2 & B \end{bmatrix}}_{\text{macierz mała}}$$

4.3 Obliczenie współczynników równania kanonicznego krzywej drugiego stopnia

Aby obliczyć współczynniki równania kanonicznego należy wykonać następujące kroki:

1. określić typ stożkowej (obliczamy wyznaczniki $\det \tilde{A}$, $\det A$ i patrzymy do tabeli niżej)
2. obliczyć wartości własne λ_1, λ_2 małej macierzy stożkowej A
 - Gdy jedna z tych wartości się zeruje, to zawsze ją oznaczamy λ_1 .
 - Gdy istnieją wartości ujemne, to jedną z nich zawsze oznaczamy λ_2
3. obliczyć współczynniki

$$c_{11} = |\lambda_1| \quad c_{22} = |\lambda_2| \neq 0 \quad c_{33} = \left| \frac{\det \tilde{A}}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \right| \neq 0 \quad c_{13} = \sqrt{\left| \frac{\det \tilde{A}}{\lambda_2} \right|}$$

Równanie kanoniczne	Rząd macierzy \tilde{A}	$\det \tilde{A}$	$\det A$	Typ stożkowej
$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 - c_{33} = 0$	3	$\neq 0$	> 0	elipsa $\operatorname{tr} A \cdot \det \tilde{A} < 0$
$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33} = 0$	3	$\neq 0$	> 0	elipsa urojona $\operatorname{tr} A \cdot \det \tilde{A} > 0$
$c_{11}x^2 - c_{22}y^2 - c_{33} = 0$	3	$\neq 0$	< 0	hiperbola
$c_{22}y^2 - 2c_{13}x = 0$	3	$\neq 0$	$= 0$	parabola
$c_{11}x^2 - c_{22}y^2 = 0$	2	$= 0$	< 0	para prostych przecinających się rzeczywistych
$c_{11}x^2 + c_{22}y^2 = 0$	2	$= 0$	> 0	para prostych przecinających się urojonych
$c_{22}y^2 - c_{33} = 0$	2	$= 0$	$= 0$	para prostych równoległych rzeczywistych
$c_{22}y^2 + c_{33} = 0$	2	$= 0$	$= 0$	para prostych równoległych rzeczywistych
$c_{22}y^2 = 0$	1	$= 0$	$= 0$	prosta urojona

Krzywa jest niezdegenorowana, gdy $\operatorname{rz.} \tilde{A} = 3$