ELiTM: Notatki z przedmiotu Elementy Logiki i Teorii Mnogości

2023-10-27 – 2024-01-30

Spis treści

Przedmowa

To są notatki z przedmiotu Elementy Logiki i Teorii Mnogości prowadzonego na kierunku IAD w 2023/2024 roku przez dr Małgorzatę Murat. Treści obejmują 12 wykładów z 15 (pierwsze trzy nie były notowane).

Autor starał się notować najlepiej jak potrafi, jednak mógł przepisać źle. W wykładach również zdarzały się niedoprecyzowania lub błędy i jeśli były zauważone, były poprawione, jednak to nie oznacza, że treści notatek są bezbłędne (w tym gramatycznie).

Notatki znajdują się w **domenie publicznej** na warunkach licencji CC0 1.0 Universal[1]. Kod źródłowy można znaleźć w repozytorium na GitHub https://github.com/wmit-materialy/notatki

[1] https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.pl

2023-10-27

1 Teoria mnogości

1.1 Podstawowe definicje teorii mnogości

Para uporządkowana Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, gdzie

- a - poprzednik pary
- b - następnik pary

Twierdzenie 1.1: Równość par

Dwie pary (a, b), (c, d) są równe wtw, gdy $a = c \wedge b = d$
Wprost z definicji wynika, że $A \times B \neq B \times A$

$$(a, b) = \{\{a\},\{a, b\}\}$$
$$(b, a) = \{\{b\},\{a, b\}\}$$

Iloczyn kartezjański Iloczynem kartezjańskim zbiorów A, B nazywamy zbiór par uporządkowanych (a, b), takich, że $a \in A$, $b \in B$.

Zbiór potęgowy Zbiorem potęgowym $P(X)$ nazywamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X. Moc zbioru potęgowego $|P(X)| = 2^{|X|}$

Indeksowana rodzina zbiorów Indeksowaną rodziną zbiorów nazywamy funkcję $x : I \to X$, gdzie I – zbiór indeksów. $x : i \mapsto x(i) = x_i$. Zwyczajowo zamiast pisania $x(i)$ piszę się x_i.

1.1.1 Uogólniona suma zbiorów

Uogólniona suma zbiorów Uogólnioną sumą indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy zbiór elementów które należą do co najmniej jednego ze zbiorów $A_i, i \in I$.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^{n} &\iff (x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n) \\ &\iff \exists_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} x \in A_i \end{aligned}$$

$$\forall_{x\in U}\left[x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff \exists_{i\in I} x \in A_i\right]$$

1.1.2 Uogólniony iloczyn zbiorów

Uogólniony iloczyn zbiorów Uogólnionym iloczynem indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_i : i \in I\}$ nazywamy zbiór złożony z elementów, które należą do każdego ze zbiorów $A_i, i \in I$.

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i=1}^{n} &\iff (x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n) \\ &\iff \forall_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} x \in A_i \end{aligned}$$

$$\forall_{x\in U}\left[x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff \forall_{i\in I} x \in A_i\right]$$

Przykład 1.1

$$I = \mathbb{N}_+, X = \mathbb{N} f : \mathbb{N}_+ \to P(\mathbb{N}) f(i) = \{ik : k \in \mathbb{N}\}$$

$$A_1 = \{1 \cdot k : k \in N\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$$

$$A_2 = \{2k : k \in N\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

$A_{11} = \{11k : k \in \mathbb{N}\}$ – zbiór liczb nieujemnych podzielnych przez 11

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}_+} A_i = \{0\} \qquad \bigcup_{i\in\mathbb{N}_+} A_i = \mathbb{N}$$

1.2 Aksjomaty teorii mnogości

Aksjomat ekstensjonalności Dwa zbiory są równe jeśli mają te same elementy.

$$\forall_x \forall_y [x = y \Leftrightarrow \forall_t (t \in x \Leftrightarrow t \in y)]$$

Aksjomat zbioru pustego Istnieje zbiór który nie ma elementów.

$$\exists_x \forall_y \neg(y \in x)$$

Aksjomat pary Dla dowolnych dwóch elementów istnieje zbiór którego elementami są jedynie zbiory x i y.

$$\forall_x \forall_y \exists_z \forall_t [t \in z \Leftrightarrow (t = x \vee t = y)]$$

Zbiór, o którym mowa w aksjomacie pary nazywamy parą (nieporządkowaną) i oznaczamy $\{x, y\}$.

Aksjomat sumy Dla dowolnego zbioru x istnieje zbiór y, którego elementami są tylko i wyłącznie elementy zbioru x.

Zbiór y oznacza się $\bigcup x$.

$$\forall_x \exists_y \forall_z [z \in y \Leftrightarrow \forall_{t \in x} x \in t]$$

Aksjomat zbioru potęgowego Dla każdego zbioru x istnieje zbiór p, którego jedynymi elementami są dokładnie podzbiory zbioru x.

$$\forall_x \exists_y \forall_z [z \in y \Leftrightarrow \forall_t \, t \in z \Rightarrow t \in x]$$

Aksjomat nieskończoności Istnieje zbiór induktywny A, taki, że

1. $A \in X$,
2. $\forall_A \;\; A \in X \Leftrightarrow S(A) \in X$, gdzie $S(A) = A \cup \{A\}$.

Takim zbiorem jest na przykład

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$$

Aksjomat podzbiorów Dla każdego zbioru a istnieje zbiór b złożony tylko z takich elementów zbioru a, które mają własność ϕ.

Aksjomat wyboru Dla każdej rodziny niepustych i rozłącznych zbiorów istnieje zbiór złożony z jednego elementu każdego zbioru tej rodziny.

Aksjomat regularności (ufundowania) Każdy niepusty zbiór x ma element rozłączny z x.

2 Relacja binarna

Relacja binarna (dwuargumentowa) Każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego zbiorów X, Y (tj. $X \times Y$) nazywamy relacją w iloczynie kartezjańskim zbiorów X i Y (krótko relacją w $X \times Y$)

Relacja jest albo zbiorem pustym, albo zbiorem par uporządkowanych

Istnienie pary (x, y) w relacji R oznacza, że x jest w relacji z y

$$(x, y) \in R \iff xRy$$

Przykład 2.1

$$\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$1 \leq 2 \quad \begin{matrix} (1{,}2) \in \leq \\ (2,1) \notin \leq \end{matrix}$$

Przykład 2.2

$$R \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$$
$$(x, y) \in R \iff x|y$$
$$(1, 2) \in R \quad (4, 64) \in R$$

Zamiast pisać $(x, y) \in R$ będziemy pisać xRy oraz oznaczymy $X \times X = X^2$, zatem $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Jeżeli relacja R jest zdefiniowana w X^2, to będziemy mówić, że «R jest zdefiniowana w X^2».

2.1 Działania na relacjach

Na relacjach jako zbiorach możemy wykonywać operacje sumowania ($\cup$), odejmowania ($\setminus$), znajdowania części wspólnych ($\cap$) w sensie teorii mnogości. Możemy też tworzyć iloczyny kartezjańskie ($\times$).

2.2 Dziedzina relacji

Dziedzina relacji Dziedziną relacji $R \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór poprzedników par należących do relacji R

Będziemy pisać $D(R) = \{x \in X : xRy\}$

2.3 Przeciwdziedzina relacji

Przeciwdziedzina relacji Przeciwdziedziną relacji $R \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór następników par należących do relacji R.

Będziemy pisać $\mathrm{PD}(R) = \{y \in Y : xRy\}$

Przykład 2.3

Niech $X = \{2,3,4\}, Y = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, oraz $xRy \overset{def}{\iff} x|y$

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\}$$
$$D(R) = \{2,3,4\} = X \quad \text{oraz} \quad \mathrm{PD}(R) = \{2,4,6,3\} \neq Y$$

2023-11-03

Obraz Obrazem zbioru A względem relacji R nazywamy zbiór następników par $(x,y) \in R$, gdzie poprzedniki należą do zbioru A, czyli $x \in A$.

$$\vec{R}(A) = \{y \in Y : \exists_{x \in A} xRy\}$$

Przeciwobraz Przeciwobrazem zbioru B względem relacji R nazywamy zbiór poprzedników par $(x,y) \in R$, następniki których należą do zbioru B, czyli $y \in B$.

$$\vec{R}^{-1}(B) = \{x \in X : \exists_{y \in B} xRy\}$$

Relacja odwrotna Relacją odwrotną R^{-1} do relacji $R \subseteq X \times Y$ nazywamy relację $R^{-1} \subseteq Y \times X$, taką, że $yR^{-1}x \iff xRy$

Złożenie relacji Złożenie relacji $R \subseteq X \times Y$ z relacją $S \in Y \times Z$ nazywamy relację $R \circ S$, taką, że

$$\forall_{x \in X} \forall_{z \in Z} \; [x(R \circ S)z \Leftrightarrow (\exists_{y \in Y} \; xRy \wedge ySz)]$$

2.4 Funkcja

Funkcja Funkcją nazywamy relację dwuargumentową $f \subseteq X \times Y$, gdy dla każdego $x \in X$ istnieje co najwyżej jeden $y \in Y$, taki że xfy

Relacja $f \subset X \times Y$ jest funkcją wtw, gdy spełnia dwa warunki:

1. $\forall_{x \in X} \, \exists_{y \in Y} \; xfy$ (warunek istnienia)
2. $\forall_{x \in X} \, \forall_{y_1, y_2 \in Y} \; (xfy_1 \wedge xfy_2 \implies y_1 = y_2)$ (warunek jednoznaczności)

2.4.1 Złożenie funkcji

Złożenie funkcji jest operacją łączną (tzn. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$), ale nie jest przemienną (tzn. $f \circ g = g \circ f$ nie zachodzi w przypadku ogólnym).

2.5 Inne typy relacji

Funkcja częściowa Funkcją częściową nazywamy relację $R \subseteq X \times Y$, która spełnia warunek jednoznaczności

$$\forall_{x \in X} \ \forall_{y_1, y_2 \in Y_f} \ (xfy_1 \wedge xfy_2 \implies y_1 = y_2)$$

Funkcja częściowa funkcji $f : X \to Y$ jest zdefiniowana tylko dla podzbioru $S \subset X$, a nie dla całego zbioru X.

Przykład 2.4

Funkcja $f(x) = x^2$ jest funkcją częściową, bo jest funkcją, a każda funkcja jest funkcją częściową.

Iniekcja Iniekcją nazywamy funkcję $f : X \to Y$, każdy element przeciwdziedziny której jest przyjmowany co najwyżej raz, formalnie:

$$\forall_{a \in X} \forall_{b \in X} \ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Surjekcja Surjekcją nazywamy funkcję $f : X \to Y$, która przyjmuje każdą wartość ze swojej przeciwdziedziny, tzn. dla takiej funkcji jej obraz jest jej przeciwdziedziną.

$$\forall_{Y \in y} \exists_{x \in X} \ y = f(x)$$

Przykład 2.5

Funkcja $f(x) = x^2$ nie jest surjekcją na $\mathbb{R}$, bo np. dla $f(x) = -1$ nie istnieje x w dziedzinie $\mathbb{R}$

Bijekcja Bijekcją nazywamy funkcję, która jest injekcją i surjekcją

Przykład 2.6

Przykładem funkcji bijekcyjnej jest funkcja identycznościowa:

$$I \subseteq \mathbb{R}^2 \quad I = \{(x, x) \in \mathbb{R}\}, \text{ czyli } I(x) = x$$

2023-11-10

2.6 Funkcja odwracalna

$f \subseteq X \times Y$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy f jest bijekcją

Dowód 2.1

$$(g \circ f) = I_x \qquad (f \circ g) = I_y$$

$$(p \iff q) \iff (\neg p \iff \neg q)$$

Załóżmy, że f jest odwracalna, tzn. istnieje funkcja $g \subseteq Y \times X$ taka, że:

$$g \circ f = I_X \qquad f \circ g = I_Y$$

Zauważmy, że z samej definicji I_Y, I_Y wynika, że I_X i I_Y są bijekcjami

$$I_X \subseteq X^2, I_X(x) = x$$

Zatem $g \circ f$ też jest bijekcją, czyli:

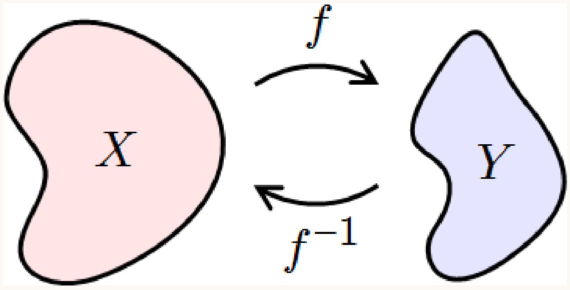
$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} x_1 \neq x_2 \implies g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$$

Stąd wynika, że $f(x_1) \neq f(x_2)$, bo gdyby tak nie było, to $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Czyli $I_x(x_1) = I_x(x_2)$, a z definicji I_x wynikałoby, że $x_1 = x_2$, sprzeczne z wyborem x_1, x_2.
Przy okazji udowodniliśmy, że jeśli $g \circ f$ jest iniekcją, to f jest też iniekcją.
Założyliśmy, że $f \subseteq X \times Y$ jest odwracalna, zatem $f \circ g = I_y$. Stąd wynika, że $\forall_{y \in Y} \ f(g(y)) = y$
Zauważmy, że z tego wynika $Y = f(g(Y))$
Z drugiej strony: ponieważ $g \subseteq Y \times X$, więc $f(g(Y)) \subseteq f(X)$
Mamy więc $Y \subseteq f(X) \subseteq Y$, co oznacza, że $f(X) = Y$, $f \subseteq X \times Y$. Zatem f jest surjekcją. Tym samym f jest bijekcją.
Załóżmy teraz, że f jest bijekcją. Wtedy z faktu, że f jest surjekcją wynika, że

$$\bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} f(x) = y$$

Z faktu, że f jest iniekcją, wynika, że wyżej wymieniony $x \in X$ jest dokładnie jeden. Oznacza to, że dla wyżej wymielonych x, y istnieje $g \subseteq Y \times X$ takie, że

$$y = f(x) \iff g(y) = x$$



Rysunek 1: Dziedzina i przeciwdziedzina funkcji odwrotnej

Z dowolności $x \in X$ i $y \in Y$ wynika, że istnieje $g \subseteq Y \times X$ taka, że

$$g(y) = x \iff y = f(x)$$

Zatem

- $x = g(y) = g(f(x))$ dla dowolnego $x \in X$
- $y = f(x) = f(g(y))$ dla dowolnego $y \in Y$

Oznacza to, że $g \circ f = I_x$ i $f \circ g = I_y$
Dowiedliśmy, że f jest odwracalna

2.6.1 Wniosek z twierdzenia

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia wynika, iż funkcja g o własnościach występujących w definicji funkcji odwracalnej istnieje dokładnie jeden.

Gdyby tak nie było, istniały by funkcje $g_1 \subseteq Y \times X$ oraz $g_2 \subseteq Y \times X$ takie, że

- $g_1 \circ f = I_x$ oraz $g_2 \circ f = I_x$
- $f \circ g_1 = I_y$ oraz $f \circ g_2 = I_y$

Wtedy dla dowolnych $x \in X$ mielibyśmy $g_1(f(x)) = x$ i $g_2(f(x)) = x$

Ponieważ f jest odwracalna, a więc musi być injekcją, to mamy $g_1(f(x)) = g_2(f(x))$, co oznacza, że $g_1 = g_2$

Ponieważ istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki w definicji funkcji odwracalnej, to będziemy używać oznaczenia $g = f^{-1}$ i nazywać ją funkcją odwrotną.

Twierdzenie 2.1

Jeżeli $f \subseteq X \times Y$ i $g \subseteq Y \times Z$ są bijekcjami, to istnieje $(g \circ f)^{-1}$ oraz

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Dowód 2.2

Załóżmy, że $f \subseteq X \times Y$ i $g \subseteq Y \times Z$ są bijekcjami, wtedy złożenie funkcji $g \circ f$ też jest bijekcją, a więc jest odwracalne
Niech $x \in X$ i $z \in Z$ będą takie, że

$$g(f(x)) = z$$

Wtedy istnieje $y \in Y$ taki, że $g(y) = z$ i $f(x) = y$ z definicji funkcji złożonej
Założyliśmy, że g i f są bijekcjami, zatem istnieją funkcje do nich odwrotne $g^{-1}(x) = y$ i $f^{-1}(y) = x$
Z definicji złożenia funkcji wynika, że $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z))$, gdzie

- $f^{-1} \subset Y \times X$,
- $g^{-1} \subseteq Z \times Y$

Ponadto $g(f(x)) = z \iff (g \circ f)(x) = z$.
Zauważmy, że

$$\forall x \in X\ \forall z \in Z\ [(z,x) \in (g \circ f)^{-1} \land (z, x) \in (f^{-1} \circ g^{-1})]$$

Innymi słowy mamy

$$g(f(x)) = z \iff (g \circ f)^{-1}(z) = x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$$

Co oznacza, że $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.7 Cechy relacji

Zwrotność Relację $R \subseteq X^2$ nazywamy zwrotną wtw, gdy

$$\bigwedge_{x \in X} xRx$$

Symetryczność Relację nazywamy zwrotną wtw, gdy

$$\bigwedge_{x,y \in X} xRy \implies yRx$$

Przechodniość Relację nazywamy przechodnią wtw, gdy

$$\bigwedge_{x,y,z \in X} (xRy \land yRz) \implies xRz$$

Przeciwzwrotność Relację nazywamy przeciwzwrotną wtw, gdy

$$\bigwedge_{x \in X} \neg xRx$$

Antysymetryczność Relację nazywamy antysymetryczną wtw, gdy

$$\bigwedge_{x,y \in X} (xRy \land yRx) \implies x = y$$

Spójność Relację nazywamy spójną wtw, gdy

$$\bigwedge_{x,y \in X} xRy \lor yRx$$

2.8 Relacja równoważności [2]

Relację $R \subseteq X^2$ nazywamy relacją równoważności wtw, gdy jest ona zwrotna, symetryczna, przechodnia

2.8.1 Klasa abstrakcji

Klasą abstrakcji elementu $x \in X$ względem relacji równoważności $R \subseteq X^2$ nazywamy zbiór tych elementów $y \in X$, które są w relacji z elementem x

Będziemy pisać $[x]_R = \{y \in X : yRx\}$

2.8.2 Zbiór ilorazowy

Zbiór klas abstrakcji względem relacji równoważności $R \subseteq X^2$ nazywamy **zbiorem ilorazowym**

[2] dodatkowe materiały: https://wojcienty.com/artykul/12/matematyka/teoria_mnogosci/relacje_rownowaznosci_i_klasy_abstrakcji/

Zbiór ilorazowy jest podziałem relacji równoważności

Podział zbioru Podziałem (partycją, rozbiciem) niepustego zbioru X nazywamy podzbiór zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$ oznaczany $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i \in I}$, o własnościach

- $\bigwedge\limits_{i \in I} X_i \neq \varnothing$ (Każdy element podziału jest zbiorem niepustym)
- $\bigwedge\limits_{i,j \in I} i \neq j \implies X_i \cap X_j = \varnothing$ (Elementy podziału są parami rozłączne)
- $\bigcup\limits_{i \in I} X_i = X$ (Suma elementów daje pierwotny zbiór X)

Przykład 2.7

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{X} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$$

Zasada abstrakcji Jeżeli R jest relacją równoważności na zbiorze X^2, to zbiór ilorazowy $X_{IR} = \bigcup_{x \in X} [x]_R$. Czyli zbiór ilorazowy X_{IR} jest podziałem X

2.9 Własności relacji równoważności

Jeżeli $R \subseteq X^2$ jest relacją równoważności, to

- $\bigwedge_{x \in X} x \in [x]_R$
- $\bigwedge_{x,y \in X} xRy \iff [x]_R = [y]_R$
- $\bigwedge_{x,y \in X} \neg xRy \iff [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$

Przykład 2.8

Rozważmy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

$$R \subseteq \mathbb{Z}^2 \qquad xRy \iff 5|(y - x)$$

- Ponieważ $\forall_{x \in \mathbb{Z}}\ x - x = 0$, więc R jest zwrotna
- Ponieważ $\forall_{x,y \in \mathbb{Z}} y - x = x - y$, więc R jest symetryczna

$$\bigwedge_{x,y \in \mathbb{Z}} 5|(y - x) \implies 5|(x - y)$$

Niech $x, y \in \mathbb{Z}$ będą dowolne. Rozważymy 2 przypadki.

(1) $w(5|(y-x)) = 0$

(2) $w(5|(y-x)) = 1$

- Ad(1). Z definicji implikacji wynika, że $w(5|(y-x) \implies 5|(x-y)) = 1$ bez względu na wartość logiczną zdania $5|(x-y)$
- Ad(2) $\exists k \in \mathbb{Z}\ y - x = 5k$. Zatem $x - y = -(y-x) = -5k = 5(-k)$ i $-k \in \mathbb{Z}$, ponieważ $k \in \mathbb{Z}$

$$5|(y-x) \iff \bigvee_{k \in \mathbb{Z}} y - x = 5k5|(z-y) \iff \bigvee_{l \in \mathbb{Z}} z - y = 5l$$

$$z - x = y + 5l - (y - 5k) = 5(k+l)$$

$$k, l \in \mathbb{Z} \implies k + l \in \mathbb{Z}$$

$$xRy \iff 5|(y-x) \qquad R \subseteq \mathbb{Z}^2$$

$$[0] = \{y \in \mathbb{Z} : yR0\} = \{y \in \mathbb{Z} : 5|y\} = \{5k : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} [1] = \{y \in \mathbb{Z} : yR1\} &= \{y \in \mathbb{Z} : 5|(y-1)\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}\ y - 1 = 5k\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} y = 5k + 1\} \\ &= \{5k + 1; k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$[2] = \{5k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[3] = \{5k + 3 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[4] = \{5k + 4 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned}[5] &= \{5k+5 : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{5(k+1) : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{5(k+1) : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{5m : m \in \mathbb{Z}\} \\ &= [0]\end{aligned}$$

Klasy abstrakcji relacji $xRy \iff 5|(y-x)$ są resztami z dzielenia przez 5

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$$

$$\mathbb{Z}_{IR} = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

2023-11-17

3 Porządek

3.1 Quasi porządek (Praporządek)

Quasi-porządkiem nazywamy relację $R \subseteq X^2$ która jest zwrotna i przechodnia

3.2 Porządek częściowy

Porządkiem częściowym (relacją porządku częściowego) na zbiorze niepustym X nazywamy relację $R \subseteq X^2$ która jest zwrotna, antysymetryczna, przechodnia (czyli to jest quasi porządek oraz relacja antysymetryczna).

Zbiór (X, R) nazywamy zbiorem uporządkowanym częściowo.

Silny porządek częściowy Z każdym zbiorem (X, R) uporządkowanym częściowo związany jest tzw. zbiór (X, S) silnie uporządkowany z relacją $S \subseteq X^2$ zdefiniowaną następującą

$$xSy \iff (xRy \wedge x \neq y)$$

3.3 Porządek liniowy

Porządkiem liniowym (relacją porządku liniowego) na zbiorze $X \neq \varnothing$ nazywamy relację $R \subseteq X^2$, która jest zwrotna, przechodnia, antysymetryczna i spójną (czyli to jest porządek częściowy oraz relacja spójna).

Zbiór (X, R) nazywamy zbiorem uporządkowanym liniowo.

Przykład 3.1

- $\leq \subseteq \mathbb{R}^2$ – słaby porządek liniowy na zbiorze $\mathbb{R}$
- $< \subseteq \mathbb{R}^2$ – silny porządek liniowy na zbiorze $\mathbb{R}$

3.4 Warunek trychotomii

Zauważmy, że relacja **silnego** porządku częściowego $S \subseteq X^2$ związana z relacją porządku częściowego $R \subseteq X^2$ spełnia tzw. warunek trychotomii:

$$\bigwedge_{x,y \in X} (xSy \vee ySx \vee x \neq y)$$

3.5 Diagram Hassego

Diagram Hassego to przedstawienie graficzne porządku częściowego na zbiorze zbiorze.

3.5.1 Zasady tworzenia

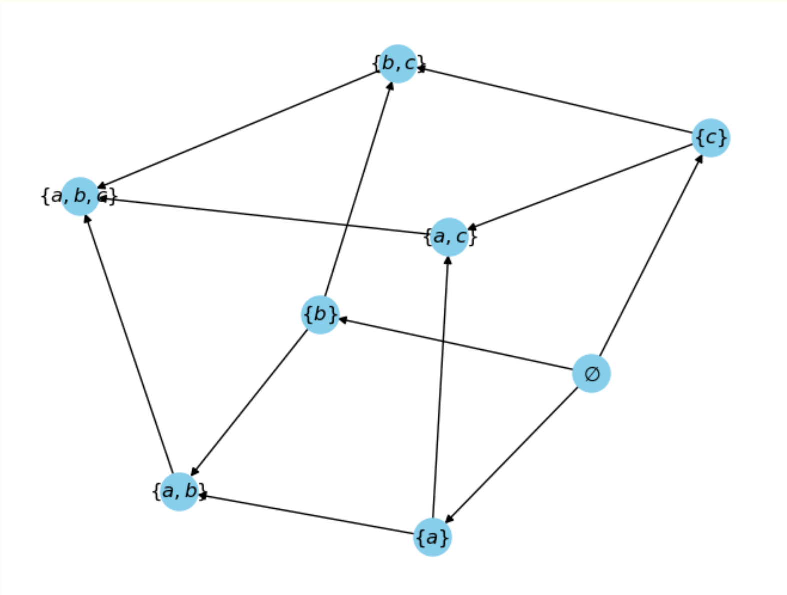
- Elementy zbioru X oznaczamy punktami na płaszczyźnie
- Jeżeli xRy, to rysujemy strzałkę lub łuk zakończony strzałką skierowany od x do y
- Jeżeli $xRy \wedge yRz$, to nie rysujemy strzałki od x do z
- Nie zaznaczamy, że xRx

Przykład 3.2

$$X = \{a, b, c\}$$

Rozważmy relację inkluzji zdefiniowaną na zbiorze potęgowym $\mathcal{P}(X)$. Udowodnijmy, że ta relacja jest porządkiem częściowym.

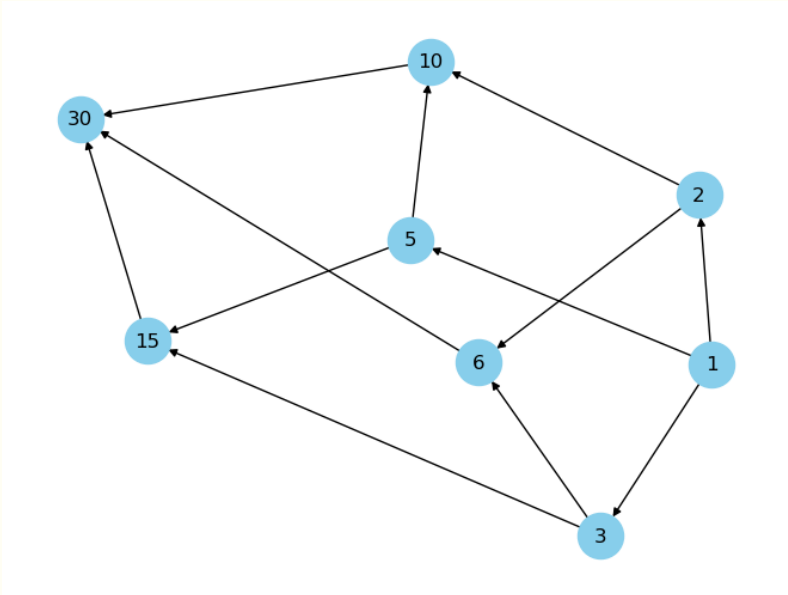
1. Zwrotność: $\bigwedge_{A \in \mathcal{P}(X)} A \subseteq A \iff \bigwedge_{x \in U} x \in A \Rightarrow x \in A$
2. Antysymetryczność: $\bigwedge_{B,A \in \mathcal{P}(X)} A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$
3. Przechodniość:
$$\begin{aligned} &\bigwedge_{A,B,C \in \mathcal{P}(X)} (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \\ &\implies \bigwedge_{x \in U} [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)] \\ &\implies (x \in A \Rightarrow x \in C) \end{aligned}$$



Rysunek 2: Hasse diagram 1

Przykład 3.3

$Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ z relacją podzielności jest zbiorem uporządkowanym częściowo



Rysunek 3: Hasse diagram 2

Zauważmy, że można zdefiniować funkcję $f : Y \to P(X)$ za pomocą tabeli

x	1	2	3	5	6	10	15	30
$f(x)$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$

f jest iniekcją i surjekcją

3.6 Izomorfizm

Izomorficzność Mówimy, że zbiór uporządkowany częściowo (X_1, R_1) jest izomorficzny ze zbiorem uporządkowanym częściowo (X_2, R_2) wtw, gdy istnieje bijekcja $f : X_1 \to X_2$ taka, że

$$\bigwedge_{x,y \in X_1} xR_1y \implies [f(x)]R_2[f(y)]$$

Wówczas f nazywamy izomorfizmem

Zauważmy, że relacja ϱ zdefiniowana na zbiorze wszystkich zbiorów uporządkowanych częściowo w następujący sposób

$$(X_1, R_1)\varrho(X_2, R_2) \iff (X_1, R_1) \text{ jest izomorficzny z } (X_2, R_2)$$

jest relacją równoważności

Dowód 3.1

Zwrotność ϱ jest zwrotna – $f = I_{X_1}$

$$\bigwedge_{x,y\in X_1} xR_1y \implies [I_{X_1}(x)]R_2[I_{X_1}(y)]$$

Symetryczność

$$(X_1, R_1)\varrho(X_2, R_2) \implies (X_2, R_2)\varrho(X_1, R_1)$$

$$\underbrace{f : X_1 \to X_2}_{\text{bijekcja}} \qquad \underbrace{f^{-1} : X_2 \to X_1}_{\text{bijekcja}}$$

$$xR_1y \implies f(x)R_2f(y)$$

$$\bigwedge_{w,z\in X_2} wR_2y \implies f^{-1}(x)R_1f^{-1}(y)$$

$$w = f(x) \qquad z = f(y)$$

Przechodniość

$$(X_1, R_1)\varrho(X_2, R_2) \land (X_2, R_2)\varrho(X_3, R_3)$$

$$\underbrace{f : X_1 \to X_2}_{\text{bijekcja}} \quad \underbrace{g : X_2 \to X_3}_{\text{bijekcja}}$$

$$g \circ f : X_1 \to X_3$$

$$xR_1y \implies [f(x)]R_2[f(y)] \implies [g(f(x))]R_3[g(f(y))]$$

Twierdzenie 3.1: o reprezentacji porządków

Każdy zbiór uporządkowany częściowo jest izomorficzny z pewną rodziną podzbiorów uporządkowaną relacją inkluzji.

3.7 Typ porządkowy

Jeżeli porządki są izomorficzne, to przyporządkowujemy im obiekt zwany typem porządkowym

3.8 Łańcuch

Łańcuch Niech X będzie zbiorem uporządkowanym częściowo przez relację $R \subseteq X^2$. Mówimy, że podzbiór $L \subseteq X$ jest łańcuchem, gdy L jest uporządkowany liniowo przez relację R.

Antyłańcuch Zbiór $\overline{L} = X \setminus L$ nazywa się antyłańcuchem.

Wprost z definicji wynika, że antyłańcuch składa się z elementów nieporównywalnych

Przykład 3.4

$(\mathbb{N}_+, |)$ – zbiór uporządkowany częściowo relacją podzielności

$$L = \{2^n : \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$$

$$4|64 \quad 16|128$$

3.9 Elementy wyróżnione w porządku częściowym

Niech $(X, \preccurlyeq)$ będzie zbiorem uporządkowanym częściowo i niech $A \subseteq X$.

Uwaga. W dalszej części zamiast pisać (X, R) jest uporządkowane częściowo będziemy pisać $(X, \preccurlyeq)$, aby zaznaczyć, że R jest relacją o *specjalnych* własnościach.

Element $a \in X$ nazywamy:

- Najmniejszym w zbiorze A wtw, gdy $a \in A \wedge \forall_{x \in A}\ a \preccurlyeq x$

  Terminologia: jeśli $a \preccurlyeq x$, to mówimy: «a poprzedza x» lub «x następuje po a»

  $a \in X$ jest najmniejszy w A wtw, gdy jest taki element zbioru A, który poprzedza wszystkie elementy zbioru A
- Największym w zbiorze A wtw, gdy

  $a \in A \wedge \forall_{x \in A}\ x \preccurlyeq a$ (następuję po wszystkich elementach zbioru)
- Minimalnym w zbiorze A wtw, gdy
  - $a \in A \wedge \neg\exists_{x \in A}\ (x \neq a \wedge x \preccurlyeq a)$ (słaby porządek)

- $a \in A \wedge \neg \exists_{x \in A}\ x \prec a$ (silny porządek)

Wprost z definicji wynika, że każdy element najmniejszy jest jednocześnie minimalnym.

- Maksymalnym w zbiorze A wtw, gdy
  - $a \in A \wedge \neg \exists_{x \in A}\ (x \neq a \wedge a \preccurlyeq x)$ (słaby porządek)
  - $a \in A \wedge \neg \exists_{x \in A}\ a \prec x$ (silny porządek)

  $a \in X$ jest maksymalny wtw, gdy należy do A i e ma różnych od siebie następników (jest swoim jedynym następnikiem).

- Ograniczeniem górnym zbioru A wtw, gdy $\forall_{x \in A} x \preccurlyeq a$

  Wprost z definicji wynika, że element największy jest ograniczeniem górnym.

- Ograniczeniem dolnym zbioru A wtw, gdy $\forall_{x \in A}\ a \preccurlyeq x$.

  Wprost z definicji wynika, że element najmniejszy jest ograniczeniem dolnym

- Kresem dolnym zbioru A wtw, gdy jest największym ograniczeniem dolnym

  Kres dolny nazywa się też infimum i oznacza $\inf A$.

- Kresem górnym zbioru A wtw, gdy jest najmniejszym ograniczeniem górnym.

  Kres górny nazywa się też supremum, oznacza się $\sup A$.

2023-11-24

3.10 Własności elementów wyróżnionych

Twierdzenie 3.2

Jeżeli $(X, \preccurlyeq)$ jest zbiorem uporządkowanym częściowo, to każde dwa elementy maksymalne (i minimalne) są nieporównywalne

Dowód 3.2

Załóżmy, że $a, b \in X$ – różne ($a \neq b$) elementy maksymalne.
Z definicji elementu maksymalnego wynika, że

$$a \in X \wedge \neg[\bigwedge_{x \in X} a \preccurlyeq x \wedge x \neq a]$$

Zauważmy, że element $b \neq a$ spełnia powyższy warunek jako element należący do X, tzn. mamy, że $\neg a \preccurlyeq b$
Podobnie powołując się na definicję elementu maksymalnego możemy pokazać, że $\neg b \preccurlyeq a$.
To oznacza, że a, b są nieporównywalne

Twierdzenie 3.3: Wniosek 1

Jeśli $(X, \preccurlyeq)$ jest zbiorem uporządkowanym częściowo i w zbiorze X istnieje co najmniej dwa elementy maksymalne (/minimalne), to w zbiorze X nie istnieje element największy (/najmniejszy)
Z definicji elementu największego wynika, że jest on porównywalny z każdym elementem zbioru X. Zatem jeśli istnieją co najmniej dwa elementy nieporównywalne, to nie istnieje elementu największego. Podobnie najmniejszego

Twierdzenie 3.4: Wniosek 2

Zbiór elementów maksymalnych (/minimalnym) który nie jest jednoelementowy jest antyłańcuchem

Twierdzenie 3.5: Wniosek 3

Jeżeli zbiór X jest uporządkowany liniowo ($(X, \preccurlyeq)$), to w zbiorze X istnieje co najwyżej element maksymalny (/minimalny)
(Zbiór uporządkowany liniowo nie ma elementu maksymalnego/minimalnego jeśli jest nieskończony, np $(\mathbb{R}, \preccurlyeq)$)

Twierdzenie 3.6: Wniosek 4

Jeżeli zbiór jest uporządkowany liniowo i istnieje element maksymalny (/minimalny), to jest on elementem największym (/najmniejszym) i jednocześnie kresem górnym (/dolnym)

3.11 Zbiór skończony

Zbiór A nazywamy skończonym wtw, gdy istnieje $n \in \mathbb{N}_+$ i bijekcja $f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to A$.

Elementy zbioru można ustawić w skończony ciąg

Twierdzenie 3.7: Wniosek 5

Jeżeli A jest zbiorem skończonym i $(A, \preccurlyeq)$ jest porządkiem częściowym, to w zbiorze A istnieje co najmniej jeden element maksymalny (/minimalny)

Twierdzenie 3.8: Wniosek 6

Jeżeli $(A, \preccurlyeq)$ jest porządkiem liniowym, to element $a \in A$ jest elementem maksymalnym (/minimalnym) wtw, gdy jest elementem największym (/najmniejszym)

3.12 Krata

Krata Zbiór częściowo uporządkowany nazywamy kratą wtw, gdy każdy podzbiór 2-elementowy zbioru X ma oba kresy

Przykład 3.5

Rozważmy $(\mathbb{N}_+, |)$ – zbiór częściowo uporządkowany
niech $m, n \in \mathbb{N}_+$ – dowolne
$\inf\{m, n\}$ – największa liczba dodatnia całkowita będąca dzielnikiem m i n, co oznacza, że $\inf\{m,n\} = \gcd(m, n)$(największy wspólny dzielnik)
$\sup\{m, n\}$ – najmniejsza liczba dodatnia całkowita podzielna przez m, n, co oznacza, że $\sup\{m, n\} = \operatorname{lcm}(m, n)$(najmniejsza wspólna wielokrotność)

Przykład 3.6

X – niepusty, skończony
$(P(X), \subseteq)$ – zbiór uporządkowany częściowo
$A, B \in P(X)$
$\inf\{A, B\} = C$, gdzie $C \subseteq A \land C \subseteq B$

$$C \subseteq A \land C \subseteq B \iff \bigwedge_{x \in U} (x \in C \Rightarrow x \in A) \land (x \in C \Rightarrow x \in B)$$

$\sup\{A, B\} = A \cup B$

Dodatkowe przykłady: https://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_(order)#Examples

3.13 Dobry porządek

Niech $(A, \preccurlyeq)$ – zbiór uporządkowany liniowo

Dobre uporządkowane (dobre ufundowanie) Mówimy, że $\preccurlyeq$ jest dobrym porządkiem wtw, gdy każdy niepusty podzbiór B zbioru A ma element najmniejszy. Wtedy zbiór $(A, \preccurlyeq)$ nazywamy zbiorem dobrze uporządkowanym (dobrze ufundowanym)

Przykładem porządku liniowego, który nie jest dobrym porządkiem, jest standardowo uporządkowany zbiór liczb całkowitych (podobnie liczb rzeczywistych), gdyż w zbiorze tym nie ma najmniejszego elementu.

3.13.1 Odcinek początkowy

Niech $(A, \preccurlyeq)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym. Podzbiór E zbioru A nazywamy odcinkiem początkowym wtw, gdy

$$\bigwedge_{x,y \in A} x \in E \land y \prec x \implies y \in E$$

Zbiór $E \subseteq A$ nazywamy odcinkiem początkowym zbioru A, gdy wraz z każdym elementem x należą do niego również wszystkie elementy poprzedzające x

3.13.2 Odcinek początkowy wyznaczony przez element x

Niech $(A, \preccurlyeq)$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym.

Odcinkiem początkowym wyznaczonym przez element $x \in A$ nazywamy podzbiór $E(x) \subseteq A$ taki, że

$$E(x) = \{y \in A : y \prec x\}$$

Przykład 3.7

$$(\mathbb{R}, \leq)$$

$(-\infty, 0\rangle$	odcinek początkowy
$(-\infty, 0)$	odcinek początkowy wyznaczony przez 0

Odcinek początkowy **wyznaczony** nie zawiera elementu, przez który jest wyznaczony ten odcinek. (z definicji)
Natomiast odcinek początkowy zawiera element, przez który on jest wyznaczony odcinek. (z definicji)

Twierdzenie 3.9

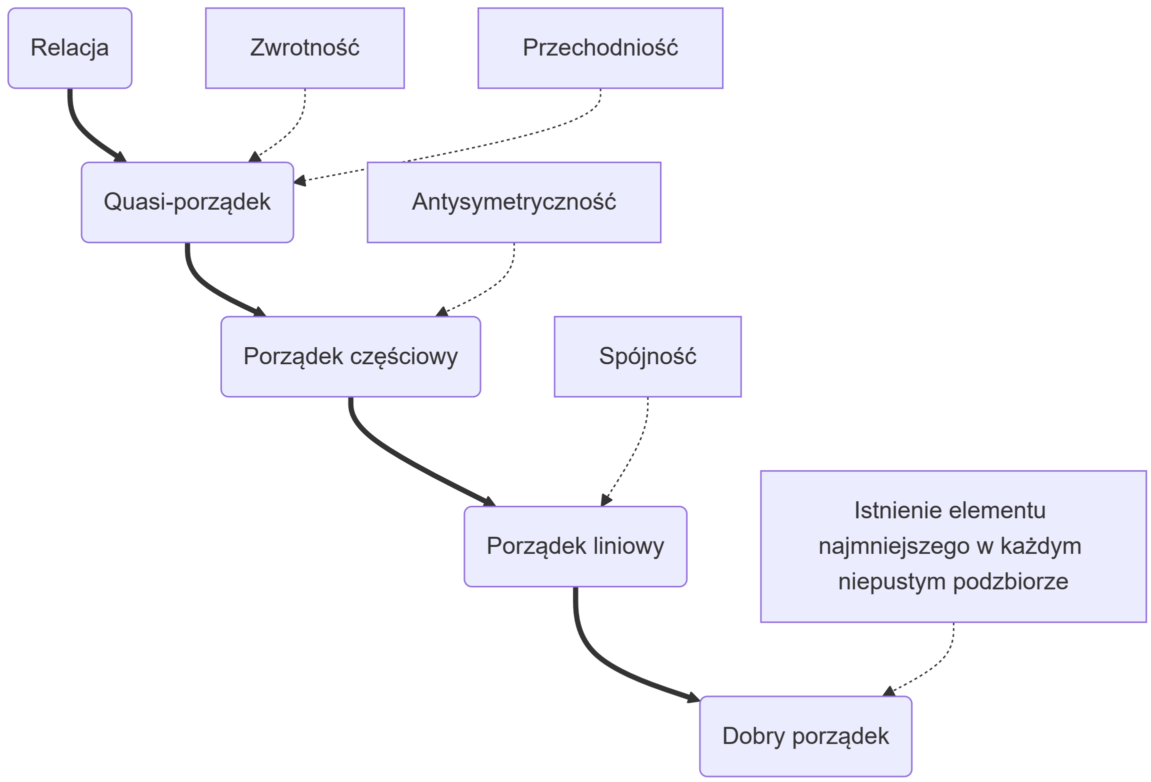
Jeżeli $(A, \preccurlyeq)$ jest zbiorem uporządkowanym liniowo, to następujące warunki są równoważne:

- $(A, \preccurlyeq)$ jest dobrze uporządkowany

- W zbiorze A nie istnieje ciąg malejący, tzn. taki ciąg, że

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}_+} x_{n+1} \prec x_n$$

- w zbiorze A wszystkie odcinki początkowe wyznaczone przez element $x \in A$ są odcinkami początkowymi ($E(x) = E$)



Rysunek 4: Hierarchia porządków

4 Liczby naturalne

4.1 Aksjomatyczna konstrukcja liczb naturalnych

I. Zero jest liczbą naturalną

II. Każda liczba naturalna ma następnik

III. Zero nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej

IV. Liczby naturalne o równych następnikach są równe

V. Jeśli zero ma własność w i z tego, że liczba naturalna n ma własność w wynika i że jej następnik ma własność w, to każda liczba naturalna ma własność w

4.2 Konstrukcja liczb naturalnych Johna von-Neumanna

0. $\varnothing$
1. $\{\varnothing\}$
2. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
3. $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
4. $\vdots$

Zbiór induktywny Zbiorem induktywnym nazywamy każdy zbiór Z spełniający warunki:

1. $\varnothing \in Z$
2. $\bigwedge\limits_{z} z \in Z \implies z \cup \{z\} \in Z$

Twierdzenie 4.1

Istnieje dokładnie jeden zbiór induktywny, który oznaczamy $\mathbb{N}$ i nazywamy zbiorem liczb naturalnych

Ograniczony podzbiór liczb naturalnych Zbiór S będący podzbiorem zbioru liczb naturalnych nazywamy ograniczonym wtw, gdy istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\bigwedge_{n \in S} n < n_0 \qquad \text{(korzystamy z indukcyjnego rozumienia relacji } <\text{)}$$

4.3 Zasada minimum (zasada dobrego porządku)

Każdy niepusty i ograniczony podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element najmniejszy (w sensie relacji $\leq$)

4.4 Zasada maximum

Każdy niepusty i ograniczony podzbiór zbioru liczb naturalnych ma element największy

---

2023-12-01

4.5 Aksjomat indukcji Peano

Jeżeli

- 0 ma własność w
- liczba naturalna ma własność w wynika, że jej następnik ma własność w

to każda liczba naturalna ma własność w

4.5.1 Zasada indukcji

Aksjomat indukcji Peano można wypowiedzieć w terminach funkcji zdaniowej.

Taką wypowiedź nazywamy **zasadą indukcji w wersji niezupełnej** lub po prostu **zasadą indukcji**.

Niech $T(n)$ będzie funkcją zdaniową argumentu $n \in \mathbb{N}$. Zamiast pisania $w(T(0))$ będziemy pisać $T(0)$, przyjmując to za równoznaczny zapis.

Jeżeli

1) $T(0)$
2) $\forall_{n \geq 0}\ T(n) \Rightarrow T(n+1)$

to $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ T(n)$

4.5.2 Zasada indukcji z dowolną bazą

Różni się tylko tym, że n_0 nie musi być zerem.

Jeżeli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ i

1) $T(n_0)$
2) $\forall_{n \geq n_0}\ T(n) \Rightarrow T(n+1)$

to $\forall_{n \geq n_0}\ T(n)$

4.5.3 Zasad indukcji z większym krokiem

Jeżeli

1) $T(0) \land T(1)$
2) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, T(n) \Rightarrow T(n+2)$

to $\forall_{n\in\mathbb{N}}\, T(n)$

4.5.4 Zasada indukcji w wersji zupełnej

Jeżeli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ i

1) $T(n_0)$
2) $\bigwedge\limits_{n\geq n_0} \left[\left(\bigwedge\limits_{n_0\leq k\leq n} T(k) \right) \implies T(n+1) \right]$

to $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} T(n)$

4.5.5 Zasada indukcji Emmy Noether

Emmy Noether udowodniła zasadę indukcji w zbiorze dobrze uporządkowanym

Twierdzenie 4.2: Zasada indukcji w zbiorze dobrze ufundowanym

Niech

- $(A, \prec)$ będzie zbiorem dobrze uporządkowanym.
- $P \subseteq A$

Jeżeli

$$\bigwedge_{a\in A} \mathrm{E}_A(a) \subseteq P \implies a \in P$$

to $P = A$

(Przypomnienie definicji)

Dobre uporządkowanie zbiór (A, R) jest dobrze uporządkowany wtw, gdy (A, R) jest zbiorem uporządkowanym liniowo i w każdym podzbiorze zbioru A istnieje element najmniejszy

Odcinek początkowy Odcinkiem początkowym wyznaczonym przez a względem relacji $\prec$ nazywamy zbiór zdefiniowany następująco:

$$E_A(a) = \{y \in A : y \prec a\}$$

Achtung! 1

W sesji zimowej 2023/2024 było zadanie z indukcji Emmy Noether.

4.6 Podwójna zasada indukcji

Niech $T(m, n)$ będzie dwuargumentową funkcją zdaniową określoną na $\mathbb{N}^2$.

Jeżeli istnieją $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że:

1) $T(m_0, n_0)$
2) $\forall_{m \geq m_0}\ T(m, n_0) \Rightarrow T(m+1, n_0)$
3) $\forall_{m \geq m_0}\ \forall_{n \geq n_0}\ T(m, n) \Rightarrow T(m, n+1)$

to $\forall_{m \geq m_0}\ \forall_{n \geq n_0}\ T(m, n)$

Przykład 4.1

Twierdzimy, że każda liczba naturalna równa jest swojemu następnikowi. $n = \underbrace{n+1}_{\text{następnik liczby } n}$

Zauważmy, że jeżeli założymy, że $n = n + 1$, to z tego wynika, że $n + 1 = n + 1 + 1$

Oznacza to, że jeśli $T(n) \equiv (n = n + 1)$, to $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ T(n) \Rightarrow T(n + 1)$

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} T(n)$$

Zauważmy, że $T(0) \equiv [0 = 1]$ jest zdaniem fałszywym

Przykład pokazuje, że warunek w zasadzie indukcji matematycznej nie może być spełniony.

4.7 Stosowane definicje w indukcji matematycznej

- Warunek 1 w podanych zasadach nazywamy **bazą indukcji**, a
- Warunek 2 – **krokiem indukcyjnym**

W dowodach prowadzonych za pomocą indukcji w kroku indukcyjnym stosuje się zapis

$$T(n) \Rightarrow T(n+1)$$

zapisujemy w postaci

- założenie: $T(n)$
- teza: $T(n+1)$
- dowód: wykażemy, że $w(T(n) \Rightarrow T(n+1)) = 1$

Za pomocą indukcji możemy dowodzić twierdzenia które dotyczą liczb naturalnych. Możemy również definiować różne obiekty.

Przykład 4.2

Na przykład
Niech

$$\begin{cases} a_0 = 2^0 \\ a_n = 2a_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a_0 = 2 * 2^0 = 2 \\ a_2 &= 2a_1 = 2 * 2^1 = 2^2 \\ a_3 &= 2a_2 = 2 * 2^2 = 2^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Twierdzimy, że $a_n = 2^n$
Dowód indukcyjny

I. Baza indukcji

   $a_0 = 2^0$ na mocy wzoru (*) co jest zgodnie z definicją (a_n)

II. Krok indukcyjny

   - założenie: $a_n = 2^n$
   - teza: $a_{n+1} = 2^{n+1}$
   - dowód: $a_{n+1} \overset{def}{=} 2 \cdot a_n \overset{\text{założenie}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

Metoda definiowana za pomocą indukcji nazywa się rekurencją.

4.8 Rekurencja

Mówimy, że ciąg a_n jest zdefiniowany rekurencyjnie wtw, gdy znamy $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ i istnieje funkcja f taka, że $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_k)$

Przykład 4.3

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = f(a_{n-1}), \quad f(x) = nx \end{cases}$$

$$a_n = n \cdot a_{n-1}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= 6 \\ a_4 &= 24 \end{aligned}$$

- Teza: $a_n = a!$
- Dowód indukcyjny: praca domowa

5 Konstrukcje zbiorów liczb

wikipedia

5.1 Konstrukcja zbioru liczb naturalnych

5.1.1 Dodawanie

Dodawaniem liczb naturalnych nazywamy funkcję $D : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ spełniającą warunki

1) $D(n, 0) = n$
2) $D(n, S(m)) = S(D(n, m))$

gdzie

- $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją która liczbie n przyporządkuje jej następnik

Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $D(n, 0) = D(0, n)$.

Istotnie, fakt ten wynika z Aksjomatu indukcji i definicji funkcji D. Mamy dowód

Dowód 5.1

$D(0,0) = D(0,0)$ oraz jeśli $D(0,n) = D(n,0)$, to $D(0,S(n)) = D(S(n),0)$
Założmy, że $D(0,n) = D(n,0)$ wtedy $D(0,S(n)) \overset{(2)}{=} S(D(0,n)) \overset{zał}{=} S(D(n,0)) \overset{(1)}{=} S(n)$
Z drugiej strony $D(S(n),0) \overset{(1)}{=} S(n)$
Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$: $D(0,S(n)) = D(S(n),0)$ na mocy ZID
Podobnie można udowodnić, że $D(n,s(m)) = D(s(m),n)$ prowadząc indukcję względem m.

5.2 Definicja liczb całkowitych

Niech $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ będzie relacją równoważności zdefiniowaną następująco:

$$(m,n)R(k,l) \iff D(m,l) = D(k,n)$$

$$\mathbb{Z} = \underbrace{(\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2)_{|R}}_{\text{iloczyn kartezjański względem relacji } R}$$

Przykład 5.1

$$D(m,l) + D(m,l) = D(k,n)$$

$$\begin{aligned}(m,n)R(k,l) \iff & m+l = k+n \\ & m-n = k-l\end{aligned}$$

Klasa abstrakcji sumy liczb $1+2$

$$\begin{aligned}[(1,2)] &= \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : (m,n)R(1,2)\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : D(m,2) = D(1,n)\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : m+2 = 1+n\} \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : m = n-1\}\end{aligned}$$

5.3 Konstrukcja zbioru liczb wymiernych

Mnożeniem nazywamy funkcję $M : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

1) $M(n,S(m)) = D(M(n,m),n)$

Przykład 5.2

Udowodnimy, że $M(2,2) = 4$

$$\begin{aligned} M(2,2) &= M(2,S(1)) \\ &\overset{(2)}{=} D(M(2,1),2) \\ &\overset{(2)}{=} D(2,2) \\ &= D(2,S(1)) \\ &= S(D(2,1)) \\ &= S(D(2,S(0))) \\ &= S(S(D(2,0))) \\ &= S(S(2)) \\ &= S(3) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Przykład 5.3

Niech $X = \{(m,n) : m \in \mathbb{Z} \land n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
Niech $\rho \subseteq X^2$ będzie relacją taką, że

$$(m,n)\rho(k,l) \iff M(m,l) = M(k,n)$$

$$m \cdot l = k \cdot n, \quad l \neq 0, n \neq 0$$

$$\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{[(1,2)]}_{\text{klasa abstrakcji } 0.5} &= \{(m,n) \in X : (m,n)\rho(1,2)\} \\ &= \{(m,n) \in X : M(m,2) = M(1,n)\} \end{aligned}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}$$

$$[(m,n)] + [(k,l)] = [(D(M(m,l), M(k,n)), M(n,l))]$$

Liczby rzeczywiste definiują się jako klasy abstrakcji granic ciągów Cauchy'ego

---

2023-12-08

6 Relacja równoliczności

Równoliczność zbiorów Mówimy, że zbiór zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B wtw, gdy istnieje bijekcja $f : A \to B$

Będziemy wtedy pisać $A \sim B$, a o funkcji f będziemy mówić, że realizuje równoliczność

6.1 Własności

Niech zbiory A, B, C są dowolne.

Twierdzenie 6.1: Zwrotność

$$A \sim A$$

Dowód 6.1

I_A(identyczność na A) ustala równoliczność A z A

Twierdzenie 6.2: Symetryczność

$$A \sim B \Rightarrow B \sim A$$

Dowód 6.2

$A \sim B$, to istnieje bijekcja $f : A \to B$ zatemy f^{-1} ustala równoliczność B z A

Twierdzenie 6.3: Przechodniość

$$(A \sim B \wedge B \sim C) \Rightarrow A \sim C$$

Dowód 6.3

Jeśli $A \sim B$, to istnieje bijekcja $f : A \to B$ Jeśli $B \sim C$, to istnieje bijekcja $g : B \to C$
Wtedy $g \circ f$ ustala równoliczność A z C

Twierdzenie 6.4: Równoliczność w zbiorze potęgowym

Niech Z będzie dowolnym zbiorem.
Relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathcal{P}(Z)$

Z powyższego twierdzenia wynika, że równoliczność jest w pewnym sensie relacją wzajemną, zatem będziemy również mówić, że zbiory A, B są równoliczne

Przykład 6.1

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ -(2n+1), & n < 0 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Zauważmy, że przeciwdziedziną tej funkcji jest zbiorem liczb naturalnych

- dla $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \quad f(n) \geq 0$ i $f(n) \in \mathbb{Z}$
- dla $n \in \mathbb{Z}, n < 0 \quad f(n) > 0$ i $f(n) \in \mathbb{Z}$

$n < 0 \implies 2n < 0$

$2n = -1$ – największa wartość dla $2n < 0$

$n < 0 \implies n \leq -1 \implies 2n \leq -2 \implies 2n+1 \leq -1 \implies -(2n+1) \geq -1 > 0$

$$\vec{f}(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$$

f jest surjekcją ze zbioru $\mathbb{Z}$ na zbiór $\mathbb{N}$
Niech $m, n \geq 0; \quad m \neq n$. Wtedy

$$f(m) - f(n) = 2m - 2n = 2(m-n) \neq 0(\text{bo } n \neq n)$$

Niech $m, n < 0, m \neq n$. Wtedy

$$f(m) - f(n) = -(2m+1) + (2n+1) = -2m + 2n = 2(n-m) \neq 0(\text{bo } m \neq n)$$

Niech $m < 0 \leq n$. Wtedy

$$f(m) - f(n) = -(2m+1) - 2n = -2(m+n) + 1 \neq 0(\text{bo } m \neq n \text{ i } n - m \geq 0)$$

Zatem $-2(m+n) \leq 0$, $-2(m+n) + 1 \leq 1$

$$-w(m+n)-1=0$$
$$2(m+n)=-1$$
$$m+n=-\frac{1}{2}(\text{co jest niemożliwe w } \mathbb{Z})$$

Mamy więc dla dowolnych $m, n \in \mathbb{Z}$, takich, że $m \neq n$ zachodzi $f(n) \neq f(m)$, co oznacza, że f jest injekcją. Pokazaliśmy, że $f(n) = \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ -(2n+1) & n < 0 \end{cases}$ jest bijekcją.

$\vec{f}(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$

Zatem $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

$$\underbrace{-4}_{7}, \underbrace{-3}_{5}, \underbrace{-2}_{3}, \underbrace{-1}_{1}, \underbrace{0}_{0}, \underbrace{1}_{2}, \underbrace{2}_{4}, \underbrace{3}_{6}, \underbrace{4}_{8},$$

6.2 Własności cd.

Niech A, B, C, D będą dowolnymi zbiorami

Twierdzenie 6.5

$$(A \sim B \land C \sim D) \implies A \times C \sim B \times D$$

Dowód 6.4

Z założenia implikacji istnieją bijekcje $f : A \to B$ i $g : C \to D$, zatem $h(x, y) = (f(x), g(y))$ też jest bijekcją. $h : A \times C \to B \times D$

Twierdzenie 6.6

$$(A \sim B \land C \sim D \land A \cap C = \varnothing \land B \cap D = \varnothing) \implies A \cup C \sim B \cup D$$

Dowód 6.5

Z założenia implikacji istnieją bijekcje $f : A \to B, g : C \to D$. Również z założenia wynika, że dziedziny i przeciwdziedziny tych funkcji są rozłączne, zatem bijekcją jest

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in C \end{cases}, \quad h : A \cup C \to B \cup D$$

Twierdzenie 6.7

$$(A \sim B) \iff P(A) \sim P(B)$$

Twierdzenie 6.8

$$(A \sim B \wedge C \sim D) \implies A^C \sim B^D$$

A^C – zbiór wszystkich funkcji postaci $f : C \to A$

6.3 Definicje zbiorów przeliczalnych, skończonych itd.

Zbiór skończony Mówimy, że zbiór A jest skończony wtw, gdy

$$A = \varnothing \vee \exists_{n \in N_+} A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

Zbiór nieskończony Zbiór A jest nieskończony wtw, gdy nie jest skończony

Przykłady: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Zbiór przeliczalny Zbiór A jest przeliczalny wtw, gdy jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $A \sim \mathbb{N}$. (można elementy ustawić w ciąg)

Zbiór co najwyżej przeliczalny Zbiór jest co najwyżej przeliczalny wtw, gdy jest skończony lub przeliczalny

Zbiór nieprzeliczalny Zbiór jest nieprzeliczalny wtw, gdy nie jest co najwyżej przeliczalny

Podzbiór właściwy[3] Zbiór A jest właściwym podzbiorem zbioru B wtw, gdy wszystkie elementy zbioru A są elementami zbioru B i istnieją elementy w B, które nie są elementami zbioru A. ($A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge A \neq B)$)

Zbiór nieskończony w sensie Dedekinda (Definicja Bolzana)[4] Zbiór A jest nieskończony w sensie Dedekinda wtw, gdy jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym.

Każdy zbiór nieskończony w sensie Dedikinda jest zbiorem nieskończonym

6.4 Moc zbioru

Mocą zbioru nazywamy cechę (obiekt) przyporządkowaną zbiorowi A oznaczaną $|A|$ lub $\overline{\overline{A}}$ taką, że

1. $|\varnothing| = 0$
2. $|A| = n$, gdzie $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$

3. zbiory równoliczne mają przypisaną tę samą moc, tzn $|A| = |B| \iff A \sim B$

$$\begin{aligned} \text{Alef zero} \quad & \aleph_0 = |\mathbb{N}| \\ \text{Continuum} \quad & \mathfrak{c} = |\mathbb{R}| \end{aligned}$$

Moc zbioru nazywa się też liczbą kardynalną

6.5 Własności mocy zbioru

Dla dowolnych zbiorów A, B, C. Te własności wprost wynikają z własności równoliczności i własności mocy zbioru $|A| = |B| \iff A \sim B$

1. $|A| = |A|$
2. $|A| = |B| \implies |B| = |A|$
3. $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \implies |A| = |C|$

Przykład 6.2

Rozważmy $(a, b), (c, d)$ – przedziały

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad a < b, c < d$$

Pokażemy, że $(a, b) \sim (c, d)$

$$y = mx + n$$

$$\begin{aligned} (a, c) : c &= ma + n \\ (b, d) : d &= mb + n \\ m, n &\text{ – nieznane} \end{aligned}$$

$c - d = m(a - b), a < b$
$m = \frac{c-d}{a-b}$
$n = c - ma, n = c - a\frac{c-d}{a-b}$

$$y = \frac{c-d}{a-b}x + c - a\frac{c-d}{a-b}$$

$$y = \frac{c-d}{a-b}(x - a) + c \quad \text{ustala równoliczność przedziałów } (a, b), (c, d)$$

Przykład 6.3

(Wykres $y = \frac{1}{x}$)
funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ ustala równoliczność $(0, 1) \sim (1, +\infty)$

Przykład 6.4

Pokażemy, że $(0, 1) \sim (0, 1\rangle$
Aby to pokazać skorzystamy z twierdzenia, które jest jednym z wyżej podanych własności równoliczności:

$$(A \sim B \wedge C \sim D \wedge A \cap C = \varnothing \wedge B \cap D = \varnothing) \implies A \cup C \sim B \cup D$$

Na początku rozważmy

$$A \subseteq (0, 1\rangle, \quad A = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\} = \{1, 1/2, \ldots\}$$

$$B \subseteq (0, 1), \quad A = \left\{\frac{1}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\} = \{1/2, 1/3, \ldots\}$$

Zauważmy, że $A = B \cup \{1\}$ i $B \cap \{1\} = \varnothing$
Pokażemy, że $A \sim B$
Funkcja $h(x) = \frac{x}{x+1}$ ustala równoliczność A i B
h – injekcja – ćwiczenie
Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$h\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{n+2}$$

Z dowolności n wynika $\vec{h}(A) = B$
Zauważmy, że $(0, 1\rangle^{\smile} A = (0, 1)^{\smile} B$, tym samym $(0, 1\rangle^{\smile} A \sim (0, 1)^{\smile} B$
Mamy również

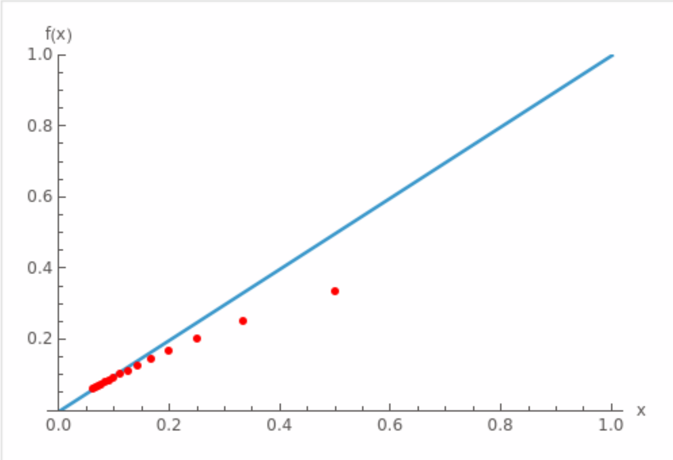
- $(0, 1\rangle = ((0, 1\rangle) \cup A$
- $(0, 1) = ((0, 1) \cup B$

i $((0, 1\rangle) \cap A = \varnothing$, $((0, 1) \cap B = \varnothing$
Mamy wszystkie warunki z założenia. Zatem

$$(0, 1\rangle \sim (0, 1)$$

Zauważmy, że równoliczność $(0, 1] \sim (0, 1)$ ustala funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & x = \frac{1}{n+1} \\ x, & x \neq \frac{1}{n+1} \end{cases}$$



Rysunek 5: Wykres f(x)

$(0, 1) \sim (0, 2) \wedge (0, 1) \sim (0, 1] \implies (0, 2) \sim (0, 1]$

2023-12-15

6.6 Porządek mocy zbiorów

Porządek słaby mocy zbiorów Mówimy, że moc zbioru A jest nie większa od mocy zbioru B i piszemy $|A| \leq |B|$ wtw, gdy istnieje iniekcja $A \to B$

Porządek silny mocy zbiorów Mówimy, że moc zbioru A jest mniejsza od mocy zbioru B i piszemy $|A| < |B|$ wtw, gdy

$$|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$$

6.7 Porządek liczb kardynalnych

Porządek słaby liczb kardynalnych Mówimy, że liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ (gotycka m) jest nie większa od liczby kardynalnej $\mathfrak{n}$ (piszemy $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$) wtw, gdy istnieją zbiory X, Y takie, że $X \subseteq Y$ i $|X| = \mathfrak{m}$ i $|Y| = \mathfrak{n}$

Porządek silny liczb kardynalnych Mówimy, że liczba kardynalna $\mathfrak{m}$ jest mniejsza od liczby kardynalnej $\mathfrak{n}$ wtw, gdy $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ i $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$

Przykład 6.5: Udowodnienie $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2$

Kazimierz Trzęsicki - Logika i teoria mnogości ujęcie systematyczno-historyczne (2001) str. 365

	0	1	2	3	4	5
0	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,5)$
1	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$
2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$
3	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$

6.8 Liczba trójkątna

n-tą liczbą trójkątną nazywamy liczbę daną wzorem

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}$$

$$T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10, T_5 = 15$$

Alternatywnie możemy zdefiniować rekurencyjnie $T_{n+1} = T_n + n + 1, n \in \mathbb{N}, T_0 = 0$

$$f(m,n) = T_{m+n} + m$$

$$f(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

$$f(3,2) = 18$$

Przykład 6.6

Udowodnimy, że f jest injekcją

Niech $(m,n), (k,l)$ – dowolne i takie, że $(m,n) \neq (k,l)$

$$\begin{aligned}\neg[(m,n)=(k,l)] &\iff \neg(n=k \wedge n=l)\\ &\iff (m\neq k \vee n\neq l)\end{aligned}$$

I. $m+n=k+l$ bez utraty ogólności można przyjąć , że $m<k$

$$T_{m+n}=T_{k+l}$$

$T_{m+n}+m$ < $T_{k+l}+k$ zatem $f(m,n)<f(k,l) \iff f(m,n)\neq f(k,l)$

II. $m+n\neq k+l$ bez utraty ogólności można przyjąć , że $m<k$

Zauważmy, że ciąg T_n jest rosnący. Mamy przecież $T_{n+1}=T_n+n+1$, czyli $T_{n+1}>T_n$(bo $n+1>0$)

Wobec tego, że $m+n\neq k+l$ możemy przyjąć, że $m+n<k+l$.

$$T_{m+n}<T_{k+l}\wedge m<k$$

$$T_{m+n}+m<T_{k+l}+k$$

$$f(m,n)<f(k,l) \implies f(m,n)\neq f(k,l)$$

Udowodniliśmy, że f jest injekcją.
Pokażemy, że f jest surjekcją

$$f(m,n)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m$$

$$(m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}) \implies (m+n\in\mathbb{N}\wedge m+n+1\in\mathbb{N}) \implies (m+n)(m+n+1)\in\mathbb{N}$$

Zauważmy, że $m+n$ i $m+n+1$, zatem jedna z nich musi być parzysta. Wobec tego $\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}\in\mathbb{N}$, co oznacza, że $f(m,n)\in\mathbb{N}$
(Udowodniliśmy, że zbiór wartości f jest przynajmniej podzbiorem liczb naturalnych)
Niech $p\in\mathbb{N}$ będzie dowolną liczbą naturalną. Pokażemy, że istnieją $m,n\in\mathbb{N}$ takie, że

$$p=f(m,n)$$

Z definicji liczb trójkątnych wynika, że

$$\bigvee_{s\in\mathbb{N}} T_s < p < T_{s+1}, \qquad T_{s+1} - T_s = s + 1$$

Niech $m = p - T_s, \quad n = s - m$. Wtedy $f(m,n) = T_{m+n} + m$

$$T_s + p - T_s = p$$

Z dowolności $p \in \mathbb{N}$ wynika, że f jest surjekcją

6.9 Przeliczalność sumy i iloczynu kartezjańskiego przeliczalnych zbiorów

Twierdzenie 6.9

Jeżeli A, B są przeliczalne, to $A \cup B$ i $A \times B$ są przeliczalne

Dowód 6.6

Jeżeli A, B są przeliczalne, to ich elementy można ustawić odpowiednio w ciąg $\underline{a}, \underline{b}$. Wtedy elementy zbioru $A \cup B$ można ustawić w ciąg np. $(a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$

Trzeba by było zdefiniować taką bijekcję $f(n) = \begin{cases} a_k, & n = 2k+1 \\ b_k, & n = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_+$

Aby uzasadnić, że $A \times B$ jest przeliczalny elementy $A \times B$ ustawiamy najpierw w tablicy, a potem tworzymy ciąg postępując tak jak w przypadku, gdy $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$

Przykład 6.7: Udowodnienie $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Niech $Q = \underbrace{Q_+}_{\text{nieujemne wymierne bez zera}} \cup \underbrace{Q_-}_{\text{ujemne wymierne bez zera}}$

$$f(m,n) = \frac{m}{n}, \qquad f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$$

Ta bijekcja pokazuje równoliczność $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \sim \mathbb{Q}_+$

$$f(m,n) = -\frac{m}{n}, \qquad f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$$

Ta bijekcja pokazuje równoliczność $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} \sim \mathbb{Q}_-$

$$\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{N} \wedge \mathbb{Q}_- \sim \mathbb{N}$$

Zatem $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Przykład 6.8: Udowodnienie nieprzeliczalności nieskończonego podzbioru zbioru $\mathbb{R}$

Pokażemy, że $\langle 0,1\rangle$ jest nieprzeliczalny.
W tym celu załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje ciąg (c_n), którego elementami są wstępnie liczby z $\langle 0{,}1\rangle$

$$\langle a_0, b_0\rangle = \langle 0, 1\rangle$$

$\langle a_1, b_1\rangle$ konstruujemy tak, że $\langle a_0, b_0\rangle$ dzielimy na 3 części $\left\langle 0, \frac{1}{3}\right\rangle, \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle, \left\langle \frac{2}{3}, 1\right\rangle$
Wybieramy z pośród tych ciągów te, do której nie należy c_0
$\langle a_2, b_2\rangle$ konstruujemy tak, że dzielimy $\langle a_1, b_1\rangle$ na 3 części i jako $\langle a_2, b_2\rangle$ definiujemy tę części, do której nie należy c_1 i t.d.
W ten sposób otrzymujemy ciąg przedziałów o następujących własnościach

$$\langle a_n, b_n\rangle \subset \langle a_{n-1}, b_{n-1}\rangle\,, n \in \mathbb{N}_+$$

$$b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$c_n \notin \langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle\,, n \in \mathbb{N}$$

Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$0 \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \le 1$$

Wobec tego ciąg a_n jest rosnący i ograniczony od góry oraz ciąg b_n jest malejący i ograniczony od dołu, zatem $\underline{a}$ jest zbieżny do g_1 oraz $\underline{b}$ jest zbieżny do g_2
Zauważmy, że z faktu $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} b_n - a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ wynika

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(1/3)^n = 0$$

Co oznacza, że $g_1 = g_2$. Niech $c = g_1$.
Zauważmy, że z konstrukcji przedziałów $\langle a_n, b_n\rangle$ wynika, że c nie jest elementem ciągu $\underline{c}$
Sprzeczność z założeniem, że $\underline{c}$ jest ciągiem, którego elementami są wszystkie liczby z przedziału $\langle 0, 1\rangle$

7 Zbiory skończone i nieskończone

7.1 Własności zbiorów skończonych

Lemat 7.1

Jeśli A jest zbiorem skończonym, takim, że $|A| = n$ oraz istnieje $a \notin A$, to

$$|A \cup \{a\}| = n + 1$$

Dowód 7.1

Udowodnimy, że jeśli $|A| = n$ i $a \notin A$, to $A \cup \{a\} \sim \{1, 2, \ldots, n+1\}$
Zauważmy, że jeśli $|A| = n$, to istnieje bijekcja $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Wtedy funkcja

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ n+1, & x = a \end{cases}$$

Istotnie, $a \notin A$ i $n + 1 \in f(A)$.
g ustala równoliczność

Lemat 7.2

Jeśli A jest niepustym zbiorem skończonym mówimy, że $|A| = n$ i $a \in A$, to $|A \setminus \{a\}| = n - 1$

Dowód 7.2

Zauważmy, że jeśli A jest niepusty i $|A| = n$, to $n \geq 1$.
Ponadto istnieje bijekcja $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$
Niech $f(a) = k, \qquad 1 \leq k \leq n$ wtedy funkcja

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) < k \\ f(x) - 1, & f(x) > k \end{cases}$$

jest bijekcją $g : A \setminus \{a\} \to \{1, 2, \ldots, n-1\}$

Twierdzenie 7.1

Jeśli A i B są rozłączne, skończone, $|A| = \mathfrak{n}$, $|B| = \mathfrak{m}$, to $|A \cup B| = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}$

Dowód 7.3

Indukcyjny względem $\mathfrak{n}$. Niech $|B| = \mathfrak{m}$. Niech $A \cap B = \varnothing$

I. Baza indukcji: $\mathfrak{n} = 0$

$|A| = 0 \implies A = \varnothing \implies A \cup B = B \implies |A \cup B| = |B| = \mathfrak{m}$

$|A \cup B| = \mathfrak{m} + \mathfrak{n} = 0 + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$

II. Krok indukcyjny

Założenie: $(|B| = \mathfrak{m} \wedge A \cap B = \varnothing \wedge |A| = \mathfrak{n}) \implies |A \cup B| = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$

Teza: $(|B| = \mathfrak{m} \wedge A \cap B = \varnothing \wedge |A| = \mathfrak{n} + 1) \implies |A \cup B| = \mathfrak{m} + \mathfrak{n} + 1$

Niech $a \in A$ i $c = A \setminus \{a\}$. Wtedy $A = C \cup \{a\}$ oraz $C \cap B = (A \setminus \{a\}) \cap B = (A \cap \overline{\{a\}}) \cap B = \varnothing$

$|C| = |A \setminus \{a\}| \overset{\text{lemat 7.2}}{=} \mathfrak{n} + 1 - 1$

Zatem z założenia indukcyjnego wynika $|C \cup B| = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$
Wobec tego $|A \cup B| = |(C \cup \{a\}) \cup B| = |(C \cup B) \cup \{a\}| \overset{\text{lemat 7.1}}{=} \mathfrak{m} + \mathfrak{n} + 1$
Ponieważ $a \notin C \cup B$ z definicji zbioru $C = A \setminus \{a\}$
Koniec dowodu

2024-01-12

7.2 Prawo różnicy zbiorów skończonych

Dla dowolnych zbiorów A, B

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

Dowód 7.4

Zauważmy, że $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, gdzie $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$.
Wobec tego $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$, a stąd

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

7.3 Prawo sumy zbiorów skończonych

Dla dowolnych zbiorów A, B

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Dowód 7.5

Zauważmy, że $(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ oraz $(A \setminus B)$, $(B \setminus A)$, $A \cap B$ są parami rozłączne.
Dokończyć dowód w domu
Uwaga. Jeśli $A \cap B \cap C = \varnothing$, A, B, C nie muszą być parami rozłączne. Na przykład: $A = a, B = b, C = a, b$. Ale jeśli A, B, C są parami rozłączne, to $A \cap B \cap C = \varnothing$

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)| \\ &= |(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| + |A \cap B| \\ &= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\ &= |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

7.4 Prawo iloczynu zbiorów skończonych

Jeśli $|A| = m$ i $|B| = n$, $m, n \in \mathbb{N}_+$, to

$$|A \times B| = m \cdot n$$

Dowód 7.6

Bez utraty ogólności załóżmy, że m jest dowolne ustalone i przeprowadzimy dowód indukcyjny względem n

I. Krok indukcyjny

   dla $n = 0$ mamy: $|B| = 0 \iff B = \varnothing$. Wtedy $A \times \varnothing = \varnothing$ oraz $|A \times B| = 0$ ponadto dla $n = 0$, $m \cdot n = 0$. Wobec tego $|A \times B| = m \cdot n$

II. Krok indukcyjny

   Załóżmy, że $(|A| = n \wedge |B| = n) \Rightarrow |A \times B| = m \cdot n$

   Teza: $(|A| = m \wedge |B| = n + 1) \Rightarrow |A \times B| = m \cdot (n + 1)$

Załóżmy, że $|A| = m \wedge |B| = n + 1$

Rozważmy zbiór $C = B \setminus \{b\}$, gdzie $b \in B$ jest dowolny. Wtedy $|C| \overset{\text{lemat 2}}{=} (n + 1) - 1$

Zatem na mocy założenia indukcyjnego $|A \times C| = m \cdot n$. Zauważmy, że $B = C \cup \{b\}$. Wobec tego $|A \times B| = |A \times (C \cup \{b\})| = |(A \times C) \cup (A \times \{b\})|$
Zauważmy, że $C \cap \{b\} = \varnothing$, bo $C = B \setminus \{b\}$. Stąd $(A \times C) \cap (A \times \{b\}) = \varnothing$. Zatem $|(A \times C) \cup (A \times \{b\}) = |A \times C| + |A \times \{b\}|$
Udowodnimy, że $|A \times \{b\}| = |A|$. W tym celu rozważymy funkcję $f : A \times \{b\} \to A$ daną wzorem $f(x, b) = x$ dla $x \in A$
f jest bijekcją, bo parom o różnych następnikach przyporządkowuje różne liczby będące poprzednikami a więc jej zawężenie do poprzedników jest identycznością
Ostatecznie mamy $|A \times B| = |A \times C| + |A \times \{b\}| = m \cdot n + m = m(n + 1)$. CND.

7.5 Zbiory mocy continuum

Mówimy, że zbiór A jest mocy continuum i piszemy $|A| = \mathfrak{c}$ wtw, gdy $A \sim \mathbb{R}$.

Wprost z definicji wynika, że zbiór liczb rzeczywistych jest mocy continuum

Przykład 7.1: Przykłady zbiorów mocy continuum

1. Zbiór ciągów zero-jedynkowych $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$
2. Zbiór ciągów liczb naturalnych: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \Rightarrow |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$$

3. Zbiór wszystkich podzbiorów liczb naturalnych: $P(\mathbb{N})$

Lemat 7.3

$$A \sim B \Rightarrow P(A) \sim P(B)$$

Dowód 7.7

Załóżmy, że $|A| = |B|$, wtedy istnieje bijekcja $f : A \to B$.
Zauważmy, że funkcja $F : P(A) \to P(B)$ zdefiniowaną wzorem $F(S) = \vec{f}(S)$ jest bijekcją
Wniosek. $P(\mathbb{N}^2) \sim P(\mathbb{N})$

Twierdzenie 7.2: Banacha

Niech $f : A \to B, g : B \to A$ będą iniekcjami. Wtedy istnieją zbiory $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ takie, że $\vec{f}(A') = B'$ oraz $\vec{g}(B \setminus B') = A \setminus A'$

Dowód 7.8

Rozważmy funkcję $h : P(A) \to P(A)$ daną wzorem $h(X) = A \setminus \vec{g}(B \setminus \vec{f}(X)), X \in P(A)$
Zauważmy, że dla dowolnej indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_i\}_{i \in I}$ mamy

$$h(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} h(A_i)$$

Istotnie mamy

$$\begin{aligned}
h(\bigcup_{i \in I} A_i) &= |\text{def funkcji } h| \\
&= A \setminus \vec{g}(B \setminus \vec{f}(\bigcup_{i \in I} A_i)) \\
&= |\text{obraz sumy to suma obrazów}| \\
&= A \setminus \vec{g}(B \setminus \bigcup_{i \in I} \vec{f}(A_i)) \\
&= |\text{Własność uogólnionej sumy}| \\
&= A \setminus \vec{g}(\bigcap_{i \in I} (B \setminus \vec{f}(A_i))) \\
&= |g \text{ jest iniekcją, z własności uog. iloczynu}| \\
&= A \setminus \bigcap_{i \in I} \vec{g}(B \setminus \vec{f}(A_i)) \\
&= |\text{Własn. uog. iloczynu}| \\
&= \bigcup_{i \in I} (A \setminus \vec{g}(B \setminus \vec{f}(A_i))) \\
&= |\text{def } h| \\
&= \bigcup_{i \in I} h(A_i)
\end{aligned}$$

Skonstruujemy teraz zbiory A', B'. W tym celu zdef. indeksowaną rodzinę zbiorów nast.

$$A_{n+1} = h(A_n), n \in \mathbb{N}$$

$$A_0 = \varnothing$$

$$A_1 = h(A_0) = h(\varnothing) = A \setminus \vec{g}(B)$$

$$A_2 = h(A_1) = h(A \setminus \vec{g}(B))$$

$$\vdots$$

Niech $A' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ oraz $B' = \vec{f}(A')$
Zauważmy, że $A' \subseteq A$. Istotnie

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A, \quad \text{bo} \quad h : P(A) \to P(A)$$

Ponadto $B' \subseteq B$, bo $f : A \to B$
Pozostało udowodnić, że $\vec{g}(B \setminus B') = A \setminus A'$
Zauważmy, że

$$h(A') = A \setminus \vec{g}(B \setminus \vec{f}(A')) = A \setminus \vec{g}(B \setminus B')$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} h(A') &= h(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} h(A_n) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n+1} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ &= A' \end{aligned}$$

Stąd $A' = A \setminus \vec{g}(B \setminus B')$
Pokażemy, że dla dowolnych zbiorów A, C takich, że $C \subseteq A$ zachodzi:

$$C = A \setminus (A \setminus C)$$

Zauważmy, że

$$A \setminus (A \setminus C) = A \cap \overline{(A \setminus C)} = A \cap \overline{(A \cap \overline{C})} = \ldots = C$$

Zatem jeśli $A' = A \setminus \vec{g}(B \setminus B')$, to $A \setminus A' = A \setminus (A \setminus \vec{g}(B \setminus B')) = \vec{g}(B \setminus B')$

2024-01-19

Twierdzenie 7.3: Cantora-Bernsteina

Dla dowolnych zbiorów A, B

$$(|A| \leq |B| \land |B| \leq |A|) \implies |A| = |B|$$

Przypomnienie:

$$|A| \leq |B| \overset{def}{\iff} \bigvee_{C \subseteq B} A \sim C$$

Lemat 7.4

$$(|A| = |B|) \land (|C| = |D|) \land (A \cap C = \varnothing) \land (B \cap D = \varnothing) \implies |A \cup C| = |B \cup D|$$

Dowód 7.9: Dowód lematu

Aby udowodnić, że przy danych założeniach

$$|A \cup C| = |B \cup D|$$

mamy wskazać bijekcję uzasadniającą tę równoliczność. Czyli funkcję $h : A \cup C \to B \cup D$ która jest surjekcją i iniekcją
Ponieważ $A \sim C$, to istnieje bijekcja $f : A \to B$. również $C \sim D$ więc istnieje bijekcja $g : C \to D$
Rozważmy funkcję

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in C \end{cases}$$

Pokażemy, że $h : A \cup C \to B \cup D$ jest iniekcją. W tym celu wybierzmy dowolne $x_1, x_2 \in A \cup C$ takie, że $x_1 \neq x_2$
Należy rozważyć trzy przypadki:

1. $x_1, x_2 \in A$ wtedy $f(x_1) \neq f(x_2)$ a ponieważ $h(x) = f(x)$ dla $x \in A$, zatem $h(x_1) \neq h(x_2)$
2. $x_1, x_2 \in C$ wtedy $g(x_1) \neq g(x_2)$ a ponieważ $h(x) = g(x)$ dla $x \in C$, zatem $h(x_1) \neq h(x_2)$
3. $x_1 \in A;\ x_2 \in C$ wtedy $h(x_1) = f(x_1) \in B$ oraz $h(x_2) = g(x_2) \in D$. Ponieważ wiemy, że $B \cap D \overset{\text{zał.}}{=} \varnothing$, to $h(x_1) \neq h(x_2)$

Pokażemy teraz, że h jest surjekcją, tzn.

$$\bigwedge_{y \in B \cup D} \bigvee_{x \in A \cup C} y = h(x)$$

Niech więc $y \in B \cup D$ będzie dowolny. Ponieważ $B \cap D = \varnothing$, możliwe są przypadki

1. $y \in B$ wtedy $\exists_{x \in A} y = f(x)$, bo f jest bijekcją $f : A \to B$. Z definicji funkcji h wynika, że $y = f(x) = h(x)$ bo $y \in B$
2. $y \in D$ wtedy $\exists_{z \in C} y = g(z)$, bo g jest bijekcją $g : B \to D$. Z definicji h wynika, że $y = g(z) = h(z)$ bo $y \in D$

Mamy więc, że funkcja jest surjekcją dla dowolnego $y \in B \cup D$.
Zatem h jest bijekcją i $A \cup C \sim B \cup D$

Dowód 7.10: Dowód twierdzenia Cantora-Bernsteina

Niech A, B są dowolne zbiory oraz $|A| \leq |B|$. Wtedy istnieje bijekcja $f : A \to B$. Załóżmy również, że $|B| \leq |A|$ i wtedy istnieje iniekcja $g : B \to A$
Wobec tego i na mocy twierdzenia Banacha istnieją zbiory $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ takie, że $\vec{f}(A') = B'$ oraz $\vec{g}(B \setminus B') = A \setminus A'$
Zauważmy, że $A = A' \cup (A \setminus A')$ oraz $A' \cap (A \setminus A') = \varnothing$
Również dla B: $B = B' \cup (B \setminus B')$ i $B' \cap (B \setminus B') = \varnothing$
Skorzystamy z lematu 7.4
Ponieważ $\vec{f}(A') = B'$, więc f jest bijekcją z A' na B', co oznacza, że $A' \sim B'$
Podobnie $\vec{g}(B \setminus B') = A \setminus A'$, więc $g : B \setminus B' \to A \setminus A'$ jest bijekcją. Zatem $(B \setminus B') \sim (A \setminus A')$
Na mocy lematu możemy napisać:

$$|A' \cup (A \setminus A')| = |B' \cup (B \setminus B')|$$

Skoro wiemy, że $A = A' \cup (A \setminus A')$ oraz $B = B' \cup (B \setminus B')$, to mamy, że

$$|A| = |B|$$

Twierdzenie 7.4

$$|P(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$$

gdzie

- $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ zbiór ciągów zero-jedynkowych i również zbiór funkcji odwzorowujących zbiór liczb naturalnych w $\{0,1\}$

Dowód 7.11

Rozważmy funkcję $f : P(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
$f(A) = \underbrace{X_A}_{\text{funkcja charakterystyczna zbioru } A}, \quad A \in P(\mathbb{N})$, gdzie
$X_A : A \to \{0,1\}$, zdef. jako $\begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
$A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$
$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x = 2n \\ 0, & x = 2n-1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(Authors note: możliwe, że tu musi być cały zbiór $\mathbb{N}$ zamiast parzystych naturalnych) $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \mapsto (1,0,1,0,\dots)$
Pokażemy, że f jest bijekcją
Iniektywność. Niech $A, B \in P(\mathbb{N})$ będą różnymi zbiorami. Wtedy $f(A) = X_A$ oraz $f(B) = X_B$. Niech $x_0 \in A$ i niech $x_0 \notin B$. Wtedy $x_A(x_0) = 1 \quad X_B(x_0) = 0$ co oznacza, że $X_A \neq X_B$ i tym samym $f(A) \neq f(B)$
Niech teraz $g \in \{0,1\}$ będzie dowolne
$\vec{f} : P(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
Istnieje wtedy zbiór, którego elementami są liczby dowolne, które są miejscami w ciągu g na których stoją jedynki

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	0	1	0	1	0	1

$A = \{x \in \mathbb{N} : g(x) = 1\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$
Dla funkcji $g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ istnieje zbiór $A = \{x \in \mathbb{N} : g(x) = 1\}$. Oczywiście $A \in P(\mathbb{N})$
Zatem $A \mapsto g$
Zauważmy, że $g = X_A$

x	0	1	2	3	4	5	6
$X_A(x)$	1	0	1	0	1	0	1

Pokazaliśmy zatem, że f jest surjekcją
Zauważmy dalej, że

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \quad \text{zatem} \quad |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$$

Ale $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})|$, czyli $P(\mathbb{N}) \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$
Wiemy, że $A \sim B \Rightarrow P(A) \sim P(B)$ oraz, że $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2$
Zatem $|P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N}^2)|$

Twierdzenie 7.5

$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leq |P(\mathbb{N}^2)|$

Dowód 7.12

Elementami zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ są ciągi liczb naturalnych, a z definicji ciąg jest funkcją. Wiemy, że funkcja jest relacją a więc podzbiorem zbioru par elementów(iloczynu kartezjańskiego)
Zatem każdą funkcję można utożsamić z parą elementów. Jeśli więc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, to $f = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : y = f(x)\}$

Z powyższego stwierdzenia wynika, że $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})|$

Podsumowanie do tej pory: pokazaliśmy, że $|P(\mathbb{N})| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})|$

Mamy więc

$$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |P(\mathbb{N})| \wedge |P(\mathbb{N}) \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$$

Zatem z twierdzenie Cantora-Bernsteina $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})|$

Podobnie $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |P(\mathbb{N})|$

$$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}| \quad \wedge \quad |\mathbb{R}| \leq |P(\mathbb{N})|$$

Twierdzenie 7.6

$$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leq |\mathbb{R}|$$

Dowód 7.13

Pokażemy, że funkcja $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} -> \mathbb{R}$ dana wzorem $f(c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{10^{k+1}}$, gdzie $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest iniekcją.
W tym celu rozważmy dwa dowolne i różne ciągi $a, b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$
Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie taką najmniejszą naturalną $k \in \mathbb{N}$, że $a_k \neq b_k$.
Np. $\begin{matrix} a = (0,0,1,1,0,1,\dots) \\ b = (1,0,1,1,0,0,\dots) \end{matrix}$
Rozważmy dwa przypadki

1. $n = 0$
2. $n > 0$

Ad(1). Mamy $\begin{matrix} a = (0, a_1, a_2, \dots) \\ b = (1, b_1, b_2, \dots) \end{matrix}$ bez utraty ogólności.
Wtedy $f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k+1}}$, bo $\forall_{k\in\mathbb{N}} 0 \leq a_k \leq 1$
Wyszedł nam szereg geometryczny

$$f(a) \leq \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} \leq \frac{1}{90}$$

Popatrzmy teraz na $f(b) = \frac{1}{10} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^{k+1}} \geq \frac{1}{10}$, bo $\forall_{k\in\mathbb{N}} 0 \leq b_k \leq 1$
Mamy więc $f(a) \leq \frac{1}{90} < \frac{1}{10} \leq f(b)$
czyli $f(a) \neq f(b)$
Ad.(2) Bez utraty ogólności przyjmijmy $a_n = 0 \wedge b_n = 1$, tzn.
$a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots)$ $b = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 1, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots)$
Wtedy

$$
\begin{aligned}
f(a) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{10^{k+1}} + 0 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{10^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k+1}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{10^{k+1}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{10^{k+1}} + \frac{\frac{1}{10^{n+2}}}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{10^{k+1}} + \frac{1}{9 \cdot 10^{n+1}} \\
&< \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{10^{k+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^{k+1}} \\
&= f(b)
\end{aligned}
$$

Pokazaliśmy, że dla $a \neq b$ mamy $f(a) < f(b)$ czyli $f(a) \neq f(b)$

Twierdzenie 7.7

$$|P(\mathbb{N}) \leq |\mathbb{R}|$$

Dowód 7.14

Dowód. Zauważmy, że $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$. Zatem $|P(\mathbb{Q})| = |P(\mathbb{N})|$.
Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$ zdef. jako $f(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$.
f jest iniekcją. Istotnie, niech $x, y \in \mathbb{R}$ będą dowolne i takie, że $x < y$. Wiemy, że pomiędzy dwoma liczbami rzeczywistymi istneje liczba wymierna, tzn.

$$\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}} \bigvee_{q \in \mathbb{Q}} (x < y \Rightarrow x < q < y)$$

Niech $q_0 \in \mathbb{Q}$ będzie takie, że $x < q_0 < y$. Wtedy $q_0 \notin f(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$
$q_0 \in f(y) = \{q \in \mathbb{Q} : q < y\}$
Oznacza to, że $f(x) \neq f(y)$
Pokazaliśmy więc, że $|P(\mathbb{Q})| \leq |\mathbb{R}|$
Zatem $|P(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$.

Podsumowanie:

- $P(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$
- $|\mathbb{R}| \leq |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$
- $|P(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$

Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że

$$|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c} \quad \wedge \quad |P(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$$

Dodatkowo mamy $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$, a zatem $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

2024-01-26

7.6 Działania na liczbach kardynalnych

7.6.1 Suma liczb

Sumą liczb kardynalnych κ, λ nazywamy moc sumy zbiorów A, B takich, że $A \cap B = \varnothing$ oraz $|A| = \kappa, |B| = \lambda$

$$\kappa + \lambda = |A \cup B|$$

$\kappa + \lambda$ nazywamy sumą kardynalną

7.6.2 Iloczyn liczb kardynalnych

Iloczynem liczb kardynalnych κ, λ nazywamy moc iloczynu kartezjańskiego zbiorów A, B takich, że $|A| = \kappa, |B| = \lambda$

$$\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$$

$\kappa \cdot \lambda$ nazywamy iloczynem kardynalnym

7.6.3 Potęgowanie

Potęgą liczb kardynalnych κ, λ nazywamy moc zbioru funkcji odwzorowujących zbiór B mocy λ w zbiór A mocy κ.

Będziemy pisać $\kappa^\lambda = |A^B|$, gdzie $|A| = \kappa, |B| = \lambda$

Poprawność definicji wynika z faktu, że $A \sim B \wedge C \sim D \implies A^B \sim C^D$ (podane bez dowodu)

Twierdzenie 7.8

Dla dowolnych A, B mamy

1. $A \cap B = \varnothing \implies |A \cup B| = |A| + |B|$
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
3. $|A^B| = |A|^{|B|}$

7.6.4 Własności działań na liczbach kardynalnych

1. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$ (na mocy przemienności $\cup$)
2. $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$ (na mocy $A \times B \sim B \times A$)
3. $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$ (na mocy łączności $\cup$)
4. $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$ (na mocy łączności $\cap$)
5. $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$ (dowód 7.15)
6. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$ (dowód 7.16)
7. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$
8. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

Dowód 7.15: Własność 5

Niech $|A| = \kappa, |B| = \lambda, |C| = \mu, B \cap C = \varnothing$. Wtedy $\lambda + \mu = |B \cup C|$ i

$$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = |A \times (B \cup C)|$$

Wiemy, że istnieje prawo rozdzielności iloczynu kartezjańskiego względem sumy zbiorów

$$\begin{aligned} |A \times (B \cup C)| &= |A \times B \cup A \times C| \\ &= |A \times B| + |A \times C| \\ &= \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu \end{aligned}$$

Dowód 7.16: Własność 6

Niech $|A| = \kappa, |B| = \lambda, |C| = \mu, B \cap C = \varnothing$
Wtedy $\lambda + \mu = |B \cup C|$ oraz $\kappa^{\lambda+\mu} = |A^{B \cup C}|$ oraz $\kappa^{\lambda} = |A^B|$ i $\kappa^{\mu} = |A^C|$, a stąd

$$\kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} = |A^B \times A^C|$$

Zauważmy, że wystarczy udowodnić, że $A^{B \cup C} = |A^B \times A^C|$, tzn wystarczy znaleźć bijekcję $\Theta : A^{B \cup C} \longrightarrow A^B \times A^C$, która będzie podana wzorem

$$\Theta(f) = (f_{|B}, f_{|C})$$

gdzie

- $f_{|B}(x) = f(x), x \in B$
- $f_{|C}(x) = f(x), x \in C$ są zawężeniami odpowiednio do zbiorów B i C

Udowodnimy, że Θ jest iniekcją
Równość funkcji $f : A \to C$ oraz $g : B \to D$

$$f = g \iff A = C \land \bigwedge_{x \in A} g(x) = f(x)$$

Niech $f_1, f_2 \in A^{B \cup C}$ będą różnymi funkcjami
Wtedy istnieje $x_0 \in B \cup C$ takie, że $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$.
Ponieważ $B \cap C = \varnothing$, więc albo $x_0 \in B$ albo $x_0 \in C$
W przypadku, gdy $x_0 \in B$ mamy
$f_1(x_0) \neq f_2(x_0) \implies f1|M(x_0) \neq f_{2|M}(x_0)$
Zatem $(f_{1|B}, f_{1|C}) \neq (f_{2|B}, f_{2|C})$ czyli $\Theta(f_1) \neq \Theta(f_2)$
W przypadku, gdy $x_0 \in C$ mamy

$$f_1(x_0) \neq f_2(x_0) \implies f_{1|C}(x_0) \neq f_{2|C}(x_0)$$

Zatem $(f_{1|B}, f_{1|C}) \neq (f_{2|B}, f_{2|C})$
Co oznacza, że $\Theta_1(f_1) \neq \Theta(f_2)$
Wobec tego Θ jest iniekcją
Surjektywność

$$\bigwedge_{h \in A^B \times A^C} \bigvee_{g \in A^{B \cup C}} h = \Theta(g)$$

Niech $h \in A^B \times A^C$. Wtedy istnieją funkcje $\lambda : B \to A$ oraz $\beta : C \to A$ takie, że $h = (\alpha, \beta)$

Ponieważ $B \cap C = \varnothing$, więc zdefiniujemy funkcję $g(x) = \begin{cases} \alpha(x), & x \in B \\ \beta(x), & x \in C \end{cases}$
Oczywiście $g \in B \cup C \to A$
Ponadto $\Theta(g) = (g_{|B}, g_{|C}) = (\alpha, \beta) = h$
Co oznacza, że Θ jest surjekcją

7.6.5 Własności związane z nierównościami

Jeśli $\kappa \leq \lambda$(tzn. istnieje iniekcja $f : A \to B$, gdzie $|A| = \kappa, |B| = \lambda$), to

1. $\kappa + \mu \leq \lambda + \mu$
2. $\kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$
3. $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$
4. $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$

8 Typy porządkowe

- patrz pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_porządkowe

Izomorfizm porządków Mówimy, że zbiór uporządkowany częściowo (X_1, R_1) jest izomorficzny do zbioru uporządkowanego częściowo (X_2, R_2) kiedy istnieje bijekcja $f : X_1 \to X_2$ taka, że

$$\bigwedge_{a,b \in X_1} aR_1b \implies [f(a)]R_2[f(b)]$$

Typ porządkowy Każdemu zbiorowi liniowo uporządkowanemu $(X, \leq_X)$ przyporządkowujemy obiekt zwany typem porządkowym w taki sposób, że zbiory izomorficzne są tego samego typu

Jeśli $(A, \leq_A)$ oraz $(B, \leq_B)$, są uporządkowane liniowo i izomorficzne, to będziemy pisać $\mathrm{typ}(A, \leq_A) = \mathrm{typ}(B, \leq_B)$

Słaby porządek liczb porządkowych Powiemy, że zbiór uporządkowany liniowo $(A, \leq_A)$ jest typu porządkowego nie większego niż typ porządkowy zbioru uporządkowanego liniowo $(B, \leq_B)$ wtw, gdy istnieje iniekcja $f : A \to B$ taka, że

$$\bigwedge_{x,y \in A} x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y)$$

Będziemy wówczas pisać $\mathrm{typ}(A, \leq_A) \leq \mathrm{typ}(B, \leq_B)$ oraz $\mathrm{typ}(A, \leq_A) < \mathrm{typ}(B, \leq_B)$ jeśli $\mathrm{typ}(A, \leq_A) \neq \mathrm{typ}(B, \leq_B)$

2024-01-30

8.1 Typy porządkowe zbiorów uporządkowanych

Typ porządkowy Typem porządkowym nazywamy cechę(obiekt) przyporządkowany zbiorowi liniowo uporządkowanemu $(A, \leq_A)$ oznaczony symbolem $typ(A, \leq_A)$

- $\mathrm{typ}(\varnothing, \rho) = 0$. Gdzie ρ jest dowolnym porządkiem
- $\mathrm{typ}(A, \leq_A) = n$, jeśli $\bigvee_{n \in \mathbb{N}_+} A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$
- $\mathrm{typ}(A, \leq_A) = \mathrm{typ}(B, \leq_B)$, jeśli $(A, \leq_A) \simeq (B, \leq_B)$ (porządki izomorficzne)
- $\mathrm{typ}(\mathbb{N}, \leq) = \omega$
- $\mathrm{typ}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \leq) = \omega^*$
- $\mathrm{typ}(\mathbb{Q}, \leq) = \lambda$
- $\mathrm{typ}(\mathbb{R}, \leq) = \eta$

Liczba kardynalna zbioru skończonego równa jest typowi porządkowemu tego zbioru, o ile jest on uporządkowany liniowo

8.2 Porządek typów porządkowych

Słaby porządek typów porządkowych Mówimy, że typ porządkowy zbioru $(A, \leq_A)$ jest nie większy od typu porządkowego zbioru $(B, \leq_B)$ i piszemy

$$\mathrm{typ}(A, \leq_A) \leq \mathrm{typ}(B, \leq_B)$$

wtw, gdy w zbiorze $(B, \leq_B)$ istnieje odcinek początkowy (patrz Odcinek początkowy) E izomorficzny ze zbiorem $(A, \leq_A)$

Silny porządek typów porządkowych Będziemy mówić, że $\mathrm{typ}(A, \leq_A)$ jest mniejszy od $\mathrm{typ}(B, \leq_B)$ i pisać

$$\mathrm{typ}(A, \leq_A) < \mathrm{typ}(B, \leq_B) \iff \mathrm{typ}(A, \leq_A) \leq \mathrm{typ}(B, \leq_B) \wedge \mathrm{typ}(A, \leq_A) \neq \mathrm{typ}(B, \leq_B)$$

Lub

$$\mathrm{typ}(A, \leq_A) < \mathrm{typ}(B, \leq_B) \iff \mathrm{typ}(A, \leq_A) \leq \mathrm{typ}(B, \leq_B) \wedge \underbrace{(A, \leq_A) \not\simeq (B, \leq_B)}_{\text{zbiory nie są izomorficzne}}$$

8.3 Własności typów porządkowych

Niech $\mathrm{typ}(A, \leq_A) = \alpha$ oraz $\mathrm{typ}(B, \leq_B) = \beta$, $\mathrm{typ}(C, \leq_C) = \gamma$

- $\alpha \leq \alpha$
- $\alpha = \alpha$
- $(\alpha = \beta \wedge \beta = \gamma) \Rightarrow \alpha = \gamma$
- $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = \alpha$
- $(\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha) \implies \alpha = \beta$
- $(\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma) \implies \alpha \leq \gamma$

8.4 Liczby porządkowe

Liczba porządkowa Typ zbioru dobrze uporządkowanego nazywamy liczbą porządkową

8.4.1 Działania na liczbach porządkowych

Suma porządkowa Sumą porządkową liczb porządkowych $\begin{matrix} \alpha = \mathrm{typ}(A, \leq_A) \\ \beta = \mathrm{typ}(B, \leq_B) \end{matrix}$ nazywamy liczbę porządkową oznaczoną $\alpha + \beta$ przyporządkowaną zbiorowi $(A \cup B, \leq_S)$, gdzie

$$\bigwedge_{x, y \in A \cup B} x \leq_S y \iff [(x, y \in A \wedge x \leq_A y) \vee (x, y \in B \wedge x \leq_B y) \vee (x \in A \wedge y \in B)]$$

Iloczyn porządkowy Iloczynem porządkowym liczb porządkowych $\begin{matrix} \alpha = \mathrm{typ}(A, \leq_A) \\ \beta = \mathrm{typ}(B, \leq_B) \end{matrix}$ nazywamy liczbę porządkową oznaczoną $\alpha \cdot \beta$ przyporządkowaną zbiorowi $(B \times A, \leq_l)$, gdzie

$$\bigwedge_{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B \times A} (x_1, y_1) \leq_S (x_2, y_2) \iff [x_1 \leq_B x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq_A y_2)]$$

Relację $\leq_l$ nazywamy porządkiem leksykograficznym

8.4.2 Własności działań na liczbach porządkowych

1. $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$
2. $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$
3. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
4. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
5. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
6. $(\beta + \gamma)\alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$
7. $\alpha < \beta \implies \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
8. $\alpha < \beta \implies \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$
9. $\alpha \leq \beta \implies \gamma \cdot \alpha \leq \gamma \cdot \beta$