
Notatki z Ekonometrii

2025-02-26 – 2025-06-04

Spis treści

Przedmowa	3
1 Liniowy model ekonometryczny	4
1.1 Zmienne objaśniające w liniowym modelu ekonometrycznym	4
1.2 Zmienne Quasi-stałe	4
1.2.1 Współczynnik zmienności	4
1.2.2 Współczynnik zmienności oparty na rozstępie	5
1.3 Współczynnik korelacji liniowej Pearsona	5
1.3.1 Macierz korelacji	5
1.3.2 Badanie istotności korelacji	7
1.4 Dobór zmiennych	8
1.4.1 Metoda analizy współczynników korelacji	8
1.4.2 Metoda pojemności informacji / metoda Hellwiga	9
1.4.3 Metoda grafowa	12
1.4.4 Współczynnik korelacji wielorakiej	13
1.5 Efekt katalizy w liniowym modelu ekonometrycznym	16
1.6 Metoda Najmniejszych Kwadratów	21
1.7 Zapis macierzowy modelu liniowego	24
1.8 MNK dla wielu zmiennych objaśniających	25
1.9 Typy modeli	27
1.9.1 Model liniowy	27
1.9.2 Model potęgowy	27
1.9.3 Model logarytmiczny	28
1.9.4 Model wykładniczy	29
1.9.5 Model hiperboliczny	29
1.9.6 Model wielomianowy	30
1.9.7 Model trygonometryczny	31
1.10 Przykłady	32
1.10.1 Model konsumpcji	32
1.10.2 Model oszczędności	33
1.10.3 Model konsumpcji z uwzględnieniem oszczędności	33
1.10.4 Model popytu dla dóbr konsumpcyjnych	33
1.10.5 Model stochastyczny kursu walutowego	34
1.10.6 Model wydajności pracy	34
1.11 Klasyfikacja modeli ekonometrycznych	34
1.11.1 Klasyfikacja ze względu na dynamikę	34

1.11.2	Klasyfikacja ze względu na postać analityczną modelu	34
1.11.3	Klasyfikacja ze względu na wymiar zmiennej objaśnianej	35
1.12	Modele wielorównaniowe	35
1.12.1	Postać strukturalna modelu	36
1.12.2	Postać zredukowana	37
1.13	Klasyfikacja modeli wielorównaniowych	41
1.14	Identyfikowalność modeli o równaniach współzależnych	43
1.15	Pośrednia metoda najmniejszych kwadratów	45
1.15.1	Procedura pośredniej metody najmniejszych kwadratów.	45
1.16	Weryfikacja modeli	46
1.16.1	Istotność parametrów strukturalnych. Test na podstawie statystyki F	47
1.16.2	Test na podstawie statystyki t	49
1.16.3	Test na podstawie statystyki t dla kombinacji liniowej parametrów	50
1.17	Badanie autokorelacji składnika losowego	52
1.17.1	Procedura testowania hipotezy o dodatniej autokorelacji	52
1.17.2	Procedura testowania hipotezy o ujemnej autokorelacji	53
1.18	Heteroscedastyczność	54
1.18.1	Test Goldfelda-Quandt	54
1.19	Normalność rozkładu składnika losowego	60
2	Prognozowanie na podstawie szeregów czasowych	63
2.1	Metody naiwne w prognozowaniu	63
2.1.1	Przykłady	63
2.2	Prognostyczny model średniej ruchomej prostej i ważonej	63
2.3	Mierniki błędów prognoz ex post	64
2.4	Analiza szeregów czasowych dynamicznych	65
2.4.1	Funkcje trendu	66
2.4.2	Najczęściej spotykane postaci analityczne funkcji trendu	67
2.5	Adaptacyjne metody wyodrębniania tendencji rozwojowej	69
2.5.1	Wzory na oceny parametrów	70
2.5.2	Interpretacje	70

Przedmowa

To są notatki z przedmiotu rachunek prawdopodobieństwa prowadzonego na kierunku IAD w 2024/2025 roku przez dr Annę Makarewicz-Trzeźniewską. Treści obejmują 13 wykładów.

Notatki mogą zawierać błędy (w tym gramatyczne).

Notatki znajdują się w **domenie publicznej** na warunkach licencji CC0 1.0 Universal¹

¹<https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.pl>

2025-02-26

1 Liniowy model ekonometryczny

1.1 Zmienne objaśniające w liniowym modelu ekonometrycznym

Zmienne objaśniające w liniowym modelu ekonometrycznym powinny być:

- silnie skorelowane ze zmienną objaśnianą,
- słabo skorelowane między sobą,
- silnie skorelowane z innymi zmiennymi objaśniającymi, które nie weszły do modelu (są ich reprezentantami).

1.2 Zmienne Quasi-stałe

Warunkiem wstępnym do tego, aby dana zmienna (np. X_j) mogła być uznana za objaśniającą w modelu, jest jej wystarczające zróżnicowanie. Zmienną objaśniającą nie może być zmienna, której poszczególne obserwacje nie różnią się między sobą (lub różnią się w niewielkim stopniu). Nie jest to wtedy już zmienna, lecz **stała** (lub **quasi-stała**).

1.2.1 Współczynnik zmienności

Do mierzenia poziomu zróżnicowania najczęściej wykorzystuje się klasyczny współczynnik zmienności:

$$V_j = \frac{s_j}{\bar{x}_j}$$

gdzie

- s_j – odchylenie standardowe zmiennej X_j
- \bar{x}_j – średnia arytmetyczna zmiennej X_j lub oparty na rozstępie

Zwykle obiera się krytyczną wartość współczynnika zmienności V^* (np. $V^* = 0,1$). Zmienne spełniające nierówność

$$V_j < V^*$$

uznaje się za mało zróżnicowane i eliminuje ze zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających.

1.2.2 Współczynnik zmienności oparty na rozstępie

$$W_j = 2 \cdot \frac{\max_i x_{ij} - \min_i x_{ij}}{\max_i x_{ij} + \min_i x_{ij}}$$

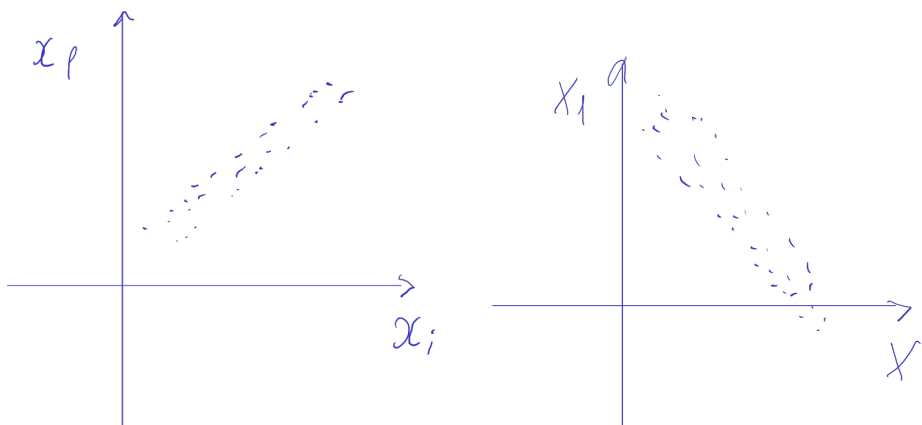
1.3 Współczynnik korelacji liniowej Pearsona

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona r_{jl} jest miarą liniowej zależności między zmiennymi X_j oraz X_l . Jest on określony następująco:

$$r_{jl} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{il} - \bar{x}_l)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \sum_{i=1}^n (x_{il} - \bar{x}_l)^2}}$$

Wartość współczynnika korelacji zawiera się w przedziale $[-1, 1]$.

Jego znak wskazuje na kierunek zależności.



1.3.1 Macierz korelacji

Współczynnik korelacji między m zmiennymi można zapisać w postaci **macierzy korelacji**

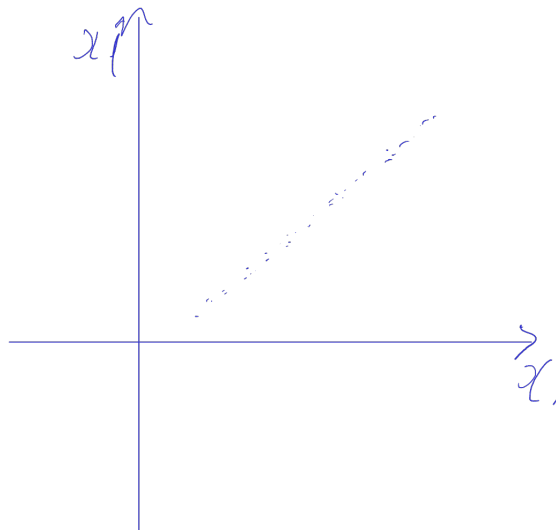
$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie

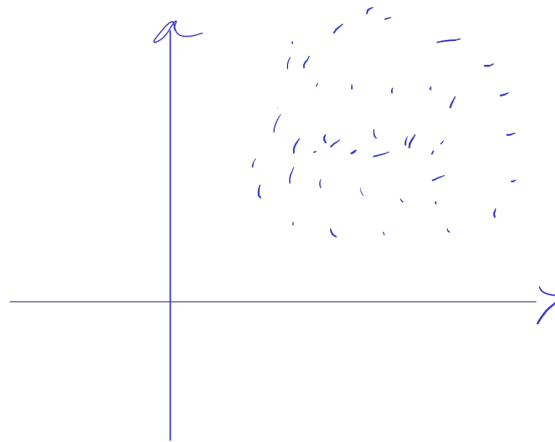
- r_{jl} – współczynnik korelacji zmiennych X_j i X_l .

Własności macierzy korelacji:

1. $-1 \leq r_{jl} \leq 1$
2. $r_{jj} = 1$
3. $r_{jl} = r_{lj}$



Rysunek 1: Funkcyjna zależność liniowa między zmiennymi



Rysunek 2: Słaba zależność liniowa między zmiennymi

1.3.2 Badanie istotności korelacji

Badając skorelowanie dwóch zmiennych X, Y , możemy podjąć decyzję o istotności skorelowania, arbitralnie obierając krytyczną wartość współczynnika korelacji (narzuconej z góry przez badacza). Możemy również uzależnić krytyczną wartość współczynnika korelacji od warunków próby, jaką dysponujemy.

Sprawdzamy wówczas hipotezę, że zmienne X, Y nie są istotnie skorelowane, czyli hipotezę $H_0 : R_{xy} = 0$, wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : r_{xy} \neq 0$

Dla wyznaczonego z próby współczynnika korelacji r_{xy} sprawdzianem tej hipotezy jest wartość statystyki:

$$t = \frac{|r_{xy}|}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}} \cdot \sqrt{n - 2}$$

Wartość krytyczną t_α odczytujemy z tablic rozkładu t-Studenta dla ustalonego z góry poziomu istotności α i dla $n - 2$ stopni swobody.

- Jeżeli $t_\alpha < t$, to hipotezę zerową należy odrzucić
Oznacza to, że wartość r_{xy} istotnie różni się od zera.
- Jeżeli $t_\alpha \geq t$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.
Otrzymana z próby, różna od zera wartość współczynnika korelacji wynika tylko z przypadku.

Jeśli w hipotezie alternatywnej określony jest znak współczynnika korelacji, czyli $H_1 : r_{xy} < 0$ lub $H_1 : r_{xy} > 0$, to w teście korzystamy z obszaru lewostronnego lub prawostronnego.

1.4 Dobór zmiennych

1.4.1 Metoda analizy współczynników korelacji

W metodzie ustala się wartość krytyczną współczynnika korelacji. Określa ona poziom istotności współczynnika korelacji. Wartość r^* może być zadana przez badacza albo wyznaczona ze wzoru

$$r^* = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + n - 2}}$$

gdzie

- t jest wartością statystyki odczytaną z tablic testu t-Studenta dla zadanego poziomu istotności α oraz dla $n - 2$ stopni swobody.

Procedura doboru zmiennych objaśniających jest następująca.

1. Ze zbioru potencjalnych zmiennych objaśniających eliminuje się wszystkie zmienne, dla których zachodzi nierówność

$$|r_j| \leq r^*$$

są to bowiem zmienne nieistotnie skorelowane ze zmienną objaśnianą.

2. Spośród pozostałych potencjalnych zmiennych jako zmienną objaśniającą wybiera się taką zmienną X_h , dla której

$$|r_h| = \max_j |r_j|$$

Ponieważ zmienna X_h jest nośnikiem największego zasobu informacji o zmiennej objaśnianej

3. Ze zbioru pozostałych potencjalnych zmiennych objaśniających eliminuje się te wszystkie zmienne, dla których

$$|r_{hi}| > r^*$$

są to bowiem zmienne zbyt silnie skorelowane ze zmienną objaśniającą X_h , a więc powielające dostarczone przez nią informacje.

1.4.2 Metoda pojemności informacji / metoda Hellwiga

Zakładamy, że nośnikami informacji są wszystkie potencjalne zmienne objaśniające. Gdy występuje m potencjalnych zmiennych objaśniających, istnieje $2^m - 1$ możliwych kombinacji zmiennych objaśniających. Dla każdej kombinacji zmiennych definiuje się tzw. **indywidualną pojemność nośników informacji**:

$$h_{kj} = \frac{r_j^2}{1 + \sum_{\substack{i \in L_k \\ i \neq j}} |r_{ij}|} = \frac{r_j^2}{\sum_{i \in L_k} |r_{ij}|}, \quad (j \in L_k)$$

gdzie

- k - numer kombinacji ($k = 1, 2, \dots, 2^m - 1$)
- L_k - zbiór numerów zmiennych w rozpatrywanej kombinacji
- j - numer zmiennej w rozpatrywanej kombinacji
- r_j - współczynnik korelacji potencjalnej zmiennej objaśniającej o numerze j ze zmienną objaśnianą (element wektora R_0)
- r_{ij} współczynnik korelacji między i -tą i j -tą potencjalną zmienną objaśniającą (element macierzy korelacji R)

Wskaźnik h_{kj} jest miernikiem wielkości informacji wnoszonej przez zmienną X_j o zmiennej objaśnianej Y w k -tej kombinacji.

Po obliczeniu wartości h_{kj} dla zmiennych wyznacza się dla każdej kombinacji **pojemność integralną** kombinacji nośników informacji. Wielkość tę oblicza się według wzoru

$$H_k = \sum_{j \in L_k} h_{kj}, \quad (k = 1, 2, \dots, 2^m - 1)$$

Pojemność integralna k -tej kombinacji jest więc sumą indywidualnych pojemności nośników informacji, wchodzących w skład tej kombinacji. Pojemność integralna stanowi kryterium wyboru odpowiedniej kombinacji zmiennych objaśniających. Wybiera się tę kombinację, dla której wartość H_k jest największa.

Wskaźniki indywidualny i integralny pojemności informacji są tak skonstruowane, iż ich wartości mieszczą się w przedziale $[0, 1]$

Przykład 1.1

W przestrzennej analizie popytu na żywiec wołowy wzięto wstępnie pod uwagę dwie zmienne objaśniające.

- X_{1i} – przeciętne dochody na jednego mieszkańca w i -tym województwie
- X_{2i} – przeciętna cena żywca wołowego w i -tym województwie

Na podstawie zebranych danych oszacowano macierz współczynników korelacji między zmiennymi objaśniającymi R oraz wektor R_0 przedstawiający stopień skorelowania zmiennej objaśnianej ze zmiennymi objaśniającymi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,6 & 1 \end{bmatrix} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,2 \end{bmatrix}$$

Spośród przedstawionych zmiennych należy dokonać wybór tych które w efekcie końcowym wyniosą najwięcej informacji o popycie na żywca wołowy

$$m = 2 \quad 2^m - 1 = 3$$

$$K_1 = \{X_1\}$$

$$K_2 = \{X_2\}$$

$$K_3 = \{X_1, X_2\}$$

- $h_{11} = \frac{(0,8)^2}{1} = 0,64$ zatem $H_1 = 0,64$
- $h_{22} = \frac{(-0,2)^2}{1} = 0,04$ zatem $H_2 = 0,04$
- $h_{31} = \frac{(0,8)^2}{1+0,6} = 0,4$ oraz $h_{32} = \frac{(-0,2)^2}{1+0,6} = 0,025$
zatem $H_3 = h_{31} + h_{32} = 0,425$

2025-03-05

Przykład 1.2

Dla danych z zad1.jpg wyznacz współczynnik zmienności W_j oraz wyeliminuj zmiennej quasi-stałe dla $W_j^* = 0,2$

Rok	y	x1	x2	x3	x4	x5
1971	1.50	7.00	0.60	12.00	0.13	0.15
1972	1.50	7.00	1.00	12.00	0.13	0.15
1973	1.60	8.00	1.00	15.00	0.13	0.16

1974	1.60	8.00	1.40	15.00	0.14	0.16
1975	2.00	8.00	1.00	16.00	0.13	0.17
1976	1.60	10.00	1.00	21.00	0.13	0.16
1977	2.00	10.00	1.00	21.00	0.13	0.15
1978	2.00	12.00	1.40	21.00	0.13	0.17
1979	2.00	12.00	1.40	21.00	0.13	0.17
1980	2.20	12.00	1.60	20.00	0.12	0.17
1981	2.25	14.00	1.60	20.00	0.15	0.17
1982	2.35	14.00	1.60	19.00	0.21	0.17
1983	2.35	14.00	2.00	18.00	0.21	0.17
1984	2.45	16.00	2.00	20.00	0.22	0.16
1985	2.50	16.00	2.00	17.00	0.22	0.16
1986	2.60	16.00	2.00	16.00	0.22	0.16
1987	2.50	16.00	2.10	16.00	0.22	0.18
1988	2.55	15.00	2.10	15.00	0.21	0.19
1989	2.60	14.00	2.03	16.00	0.21	0.19
1990	2.65	12.00	1.98	17.00	0.21	0.20
1991	2.70	12.00	2.00	21.00	0.21	0.24
1992	2.85	12.00	2.00	25.00	0.20	0.24
1993	2.80	12.00	1.96	21.00	0.20	0.24
1994	2.95	12.00	1.95	21.00	0.20	0.25
1995	3.00	11.00	1.95	20.00	0.23	0.26
1996	3.20	12.00	1.95	20.00	0.24	0.25
1997	2.97	12.00	1.93	21.00	0.24	0.24
1998	2.85	12.00	1.93	18.00	0.24	0.22

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
W_j	0,783	1,111	0,703	0,667	0,537
V_j	0,225	0,267	0,167	0,239	0,193

1.4.3 Metoda grafowa

Idea tej metody, podobnie jak w metodzie pojemności informacji, opiera się na wyborze takich zmiennych objaśniających do modelu, które są silnie skorelowane ze zmienną objaśnianą oraz słabo skorelowane między sobą. Procedura metody rozpoczyna się od utworzenia wektora korelacji R_0 między zmienną objaśnianą a potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi.

W kolejnym etapie sprawdzamy, które elementy macierzy R są tak małe, że możemy je uznać za zerowe (nieistotnie różne od zera). W tym celu porównujemy rzeczywiste współczynniki korelacji r_{ij} z macierzy R ze współczynnikiem krytycznym, który możemy wyznaczyć dwoma sposobami. Współczynnik ten można obliczyć ze wzoru

$$r^* = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + n - 2}}$$

Drugi sposób jest oparty na regule minimaksowej, takiej, że na podstawie macierzy R ustalamy

$$r^* = \min_i \max_{\substack{j \\ j \neq i}} |r_{ij}|$$

Jeśli zachodzi warunek $|r_{ij}| \leq r^*$, to wszystkie elementy spełniające ten warunek zastępujemy w macierzy R zerami. Macierz tę oznaczmy R' .

W kolejnym etapie na podstawie macierzy R' budujemy graf, w którym wierzchołkami są potencjalne zmienne objaśniające, a krawędziami niezerowe elementy macierzy R' . Możemy otrzymać graf spójny lub kilka podgrafów, a także punkty (zmienne) odosobnione. Z tak powstałych podgrafów do modelu wybieramy zmienne odosobnione (nie są one bowiem skorelowane z innymi potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi) oraz te zmienne, które mają największą liczbę powiązań (wiązań) z innymi potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi. Jeżeli takich zmiennych jest więcej niż jedna, to wybiera się spośród nich tę, która jest najsilniej skorelowana ze zmienną objaśnianą.

Przykład 1.3

Dla danych z zad1.jpg na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ sprawdź istotność współczynnika korelacji pomiędzy zmienną X_1 oraz X_5

$$r(X_1, X_5) = 0,1 \quad n = 28$$

$$\underbrace{\text{Rozkład T odw}(0,05, 26)}_{\text{kwantyl rzędu } 1 - \frac{0,05}{2} \text{ rozkładu } T(26)} \quad t_\alpha = 2,056$$

$$H_0 : r_{15} = 0 \quad H_1 : r_{15} \neq 0$$

$$t = \frac{0,1}{\sqrt{1 - 0,1^2}} \cdot \sqrt{26} = 0,512$$

Ponieważ $t_\alpha > t$ to nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

1.4.4 Współczynnik korelacji wielorakiej

Oznaczmy przez r_j współczynnik korelacji między zmienną objaśnianą Y a zmienną objaśniającą X_j oraz współczynnik korelacji między zmiennymi objaśniającymi X_j i X_l przez r_{jl} . Współczynniki korelacji między zmiennymi objaśniającymi tworzą macierz korelacji

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

a współczynniki korelacji między zmienną objaśnianą i zmiennymi objaśniającymi - wektor korelacji:

$$R_0 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

Wektor R_0 i macierz R są wykorzystywane do budowy tzw. macierzy rozszerzonej R^* :

$$R^* = \begin{bmatrix} 1 & R_0^T \\ R_0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_m \\ r_1 & 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_2 & r_{21} & 1 & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze R i R^* są wykorzystywane do budowy współczynnika korelacji wielorakiej R_w . Jest on miarą liniowej zależności między zmienną objaśnianą a liniową kombinacją zmiennych objaśniających. Przy oznaczeniach podanych wcześniej współczynnik korelacji wielorakiej jest obliczany ze wzoru

$$R_w = \sqrt{1 - \frac{\det R^*}{\det R}}$$

Współczynnik korelacji wielorakiej przyjmuje wartość z przedziału $[0, 1]$. Na końcach tego przedziału jego interpretacja jest następująca:

1. Jeżeli $R_w = 0$, to nie ma zależności liniowej,
2. Jeżeli $R_w = 1$, to między zmienną objaśnianą a liniową kombinacją zmiennych objaśniających zachodzi zależność funkcyjna liniowa.

Wartość współczynnika korelacji wielorakiej mogą stanowić podstawę doboru zmiennych w liniowym modelu ekonometrycznym wtedy, gdy kombinacje zmiennych objaśniających są jednakowo liczne. Przy dwóch zestawach potencjalnych zmiennych objaśniających zmienną objaśnianą Y wybiera się ten zestaw, dla którego współczynnik korelacji wielorakiej przyjmuje wartość większą.

Przykład 1.4

Dla danych z zad1.jpg obliczyć współczynnik korelacji wielorakiej, dla kombinacji dwuelementowych oraz wybrać zmienne do modelu ekonometrycznego

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0,58 \\ 0,86 \\ 0,48 \\ 0,87 \\ 0,83 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0,79 & 0,26 & 0,64 & 0,1 \\ 0,79 & 1 & 0,33 & 0,86 & 0,59 \\ 0,26 & 0,33 & 1 & 0,17 & 0,51 \\ 0,64 & 0,86 & 0,17 & 1 & 0,62 \\ 0,1 & 0,59 & 0,51 & 0,62 & 1 \end{bmatrix}$$

kombinacje	R^*	R	$\det R^*$	$\det R$	R_w
$\{X_1, X_2\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,08 & 0,06 \\ 0,08 & 1 & 0,09 \\ 0,06 & 0,09 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,09 \\ 0,09 & 1 \end{bmatrix}$	0,088	0,076	0,075
$\{X_1, X_3\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,08 & 0,08 \\ 0,08 & 1 & 0,06 \\ 0,08 & 0,06 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,06 \\ 0,06 & 1 \end{bmatrix}$	0,010	0,032	0,073
$\{X_1, X_4\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,08 & 0,07 \\ 0,08 & 1 & 0,04 \\ 0,07 & 0,04 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,04 \\ 0,04 & 1 \end{bmatrix}$	0,043	0,090	0,071
$\{X_1, X_5\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,08 & 0,03 \\ 0,08 & 1 & 0,0 \\ 0,03 & 0,0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,0 \\ 0,0 & 1 \end{bmatrix}$	0,061	0,090	0,069
$\{X_2, X_3\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,06 & 0,08 \\ 0,06 & 1 & 0,03 \\ 0,08 & 0,03 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,03 \\ 0,03 & 1 \end{bmatrix}$	0,094	0,091	0,085
$\{X_2, X_4\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,06 & 0,07 \\ 0,06 & 1 & 0,06 \\ 0,07 & 0,06 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,06 \\ 0,06 & 1 \end{bmatrix}$	0,051	0,060	0,097
$\{X_2, X_5\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,06 & 0,03 \\ 0,06 & 1 & 0,09 \\ 0,03 & 0,09 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,09 \\ 0,09 & 1 \end{bmatrix}$	0,066	0,052	0,048
$\{X_3, X_4\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,08 & 0,07 \\ 0,08 & 1 & 0,07 \\ 0,07 & 0,07 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,07 \\ 0,07 & 1 \end{bmatrix}$	0,026	0,071	0,033

$\{X_3, X_5\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,08 & 0,03 \\ 0,08 & 1 & 0,01 \\ 0,03 & 0,01 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,01 \\ 0,01 & 1 \end{bmatrix}$	0,027	0,040	0,033
$\{X_4, X_5\}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,07 & 0,03 \\ 0,07 & 1 & 0,02 \\ 0,03 & 0,02 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0,02 \\ 0,02 & 1 \end{bmatrix}$	0,065	0,016	0,046

2025-03-12

1.5 Efekt katalizy w liniowym modelu ekonometrycznym

Efekt katalizy w liniowym modelu ekonometrycznym oznacza silne skorelowanie zmiennej objaśnianej ze zmiennymi objaśniającymi w sensie wysoka wartość współczynnika korelacji wielorakiej spowodowana silnym skorelowaniem zmiennych objaśniających między sobą

Zmienne objaśniające, które wywołały efekt katalizy należy wyeliminować z modelu

Jeśli dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ współczynniki korelacji r_i w wektorze R_0 są dodatnie oraz uporządkowane niemalejąco, to para (R, R_0) nazywa się regularną parą korelacyjną. Dla takiej pary macierz Q o postaci

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & q_{12} & \cdots & q_{1k} \\ q_{21} & 1 & \cdots & q_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

w której $q_{ij} = q_{ji} = \frac{r_i}{r_j}$, gdzie $i < j$ nazywa się macierzą neutralną. Wielkość q_{ij} jest **wartością neutralną** współczynnika korelacji $r_{ij} = r(X_i, X_j)$

Jeśli (R, R_0) jest regularną parą korelacyjną oraz dla każdego $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ zachodzi równość $r_{ij} = q_{ij}$, to współczynnik korelacji wielorakiej $R = r_k = \max_i r_i$

Zmienne objaśniające X_1, X_2, \dots, X_{k-1} nie wnoszą dodatkowych informacji o tej zmiennej objaśnianej Y w porównywaniu ze zmienną objaśniającą X_k

Jeśli dla każdych $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ spełniona jest równość

$$r_{ij}^2 < q_{ij}^2$$

to $R^2 > r_k^2$. W tym wypadku każda ze zmiennych objaśniających dostarcza pewien zasób informacji, o zmiennej objaśnianej

W wypadku nierówności

$$r_{ij}^2 > q_{ij}^2$$

również następuje wzrost kwadratu współczynnika korelacji wielorakiej w stosunku do maksymalnej wartości prostego współczynnika korelacji r_k ale wzrost ten jest spowodowany wystąpieniem efektu katalizy.

Tak więc efekt katalizy wystąpi wówczas gdy istnieje para (i, j) taka, że

$$r_{ij} < 0 \quad \text{lub} \quad r_{ij} > \frac{r_i}{r_j}$$

Zmienna X nazywana jest zmienną katalityczną lub katalizatorem

Do wykrywania efektu katalizy w modelu ekonometrycznym wykorzystuje się wskaźnik

$$U_l = R_l^2 - H_l$$

gdzie

- l – numer kombinacji zmiennych objaśniających modelu
- R_l – współczynnik korelacji wielorakiej l -tej kombinacji zmiennych
- H_l – wskaźnik integralnej pojemności informacji l -tej kombinacji zmiennych

U_l należy do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$. Efekt katalizy nie występuje gdy $U_l = 0$, natomiast natężenie efektu katalizy osiąga wartość największą, gdy $U_l = 1$.²

Przykład 1.5

Zmienną objaśnianą modelu jest Y – wartość sprzedaży usług hoteli. Potencjalnymi zmiennymi objaśniającymi są:

- X_1 – zatrudnienie

²Elżbieta Maksymiak. Minimalizacja efektu katalizy w metodach doboru zmiennych

- X_2 – średnia cena 1 miejsca w hotelu
- X_3 – liczba miejsc w hotelach

Wektor współczynników korelacji między zmienną Y i zmiennymi X_1, X_2, X_3 oraz macierz współczynników korelacji między zmiennymi X_1, X_2, X_3 są następujące:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0,43 \\ 0,50 \\ 0,79 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0,25 & 0,74 \\ 0,25 & 1 & 0,4 \\ 0,74 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbadaj istnienie efektu katalizy dla kombinacji zmiennych $K_1 = (X_1, X_3)$ oraz $K_2 = (X_2, X_3)$

$$q_{12} = \frac{0,43}{0,5} = 0,86$$

$$q_{13} = \frac{0,43}{0,79} = 0,54$$

$$q_{23} = \frac{0,5}{0,79} = 0,63$$

Kombinacja pierwsza

$$r_{ij}^2 > q_{ij}^2$$

$$K_1 = (X_1, X_3)$$

$$0,74^2 > 0,54^2$$

$$U_1 = R_1^2 - H_1$$

$$R_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0,43 & 0,79 \\ 0,43 & 1 & 0,74 \\ 0,79 & 0,74 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,74 \\ 0,74 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \approx 0,82$$

$$h_{11} = \frac{0,43^2}{1 + 0,24} = 0,149 \quad h_{13} = \frac{0,79^2}{1 + 0,24} = 0,503 \quad H_1 = 0,46$$

$$U_1 = 0,82^2 - 0,46 = 0,21$$

Kombinacja druga

$$0,4^2 < 0,63^2$$

$$U_2 = R_2^2 - H_2$$

$$R_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,79 \\ 0,5 & 1 & 0,4 \\ 0,79 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = 0,82$$

$$h_{22} = \frac{0,5^2}{1 + 0,4} = 0,179 \quad h_{23} = \frac{0,79^2}{1 + 0,4} = 0,446 \quad H_2 = 0,62$$

$$U_2 = 0,82^2 - 0,62 = 0,0524$$

Przykład 1.6: Zadanie do wykładu 1 metoda grafowa

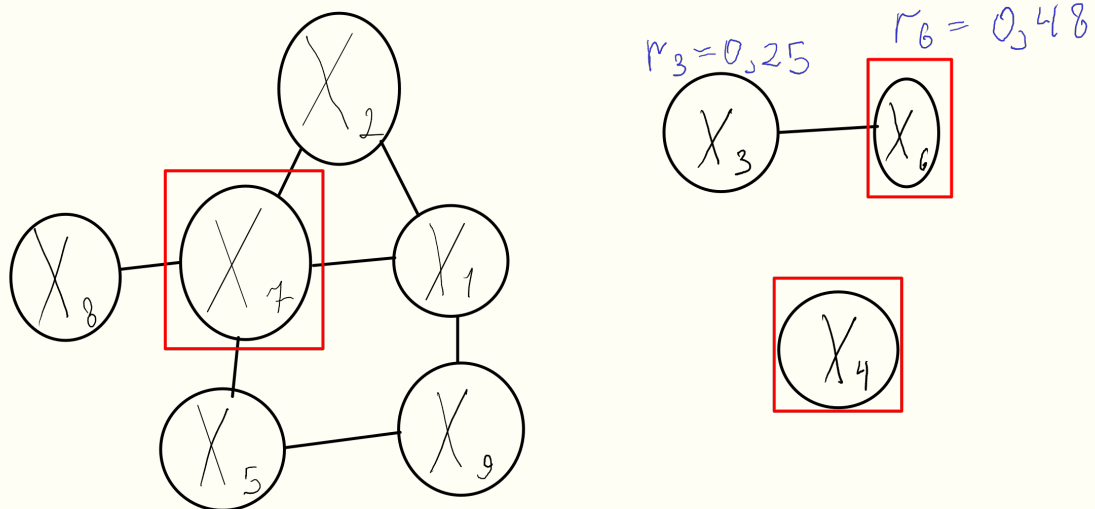
Na podstawie 22 obserwacji dokonanych na zmiennej objaśnianej i 9 zmiennych objaśniających obliczono współczynniki korelacji które przedstawiono w następujący sposób

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0,81 \\ -0,54 \\ 0,25 \\ -0,71 \\ 0,52 \\ 0,48 \\ 0,09 \\ 0,18 \\ -0,15 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0,41 & 0,05 & 0,17 & 0,28 & -0,36 & 0,51 & 0,27 & 0,6 \\ 0,41 & 1 & 0,15 & -0,3 & 0,15 & 0,21 & -0,38 & 0,28 & 0,11 \\ 0,05 & 0,15 & 1 & 0,21 & 0,08 & -0,62 & 0,06 & -0,01 & 0,15 \\ 0,17 & -0,3 & 0,21 & 1 & 0,12 & -0,25 & 0,17 & -0,05 & 0,07 \\ 0,28 & 0,15 & 0,08 & 0,12 & 1 & 0,15 & 0,47 & 0,28 & 0,39 \\ -0,36 & 0,21 & -0,62 & -0,25 & 0,15 & 1 & 0,31 & 0 & -0,13 \\ 0,51 & -0,38 & 0,06 & 0,17 & 0,47 & 0,31 & 1 & -0,58 & -0,27 \\ 0,27 & 0,28 & -0,01 & -0,05 & 0,28 & 0 & -0,58 & 1 & 0,02 \\ 0,6 & 0,11 & 0,15 & 0,07 & 0,39 & -0,13 & -0,27 & 0,02 & 1 \end{bmatrix}$$

Stosując metodę analizy grafów wybrać optymalną kombinację zmiennych objaśniających do modelu ekonometrycznego. Weryfikacje istotności współczynników korelacji przeprowadzić na poziomie istotności $\alpha = 0,1$

$$t = \underbrace{\text{Rozkład } T \text{ odw}(0,1; 20)}_{\text{Kwantyl rzędu } 1 - \frac{0,1}{2} \text{ rozkładu } T(20)} \quad t \approx 1,7341$$

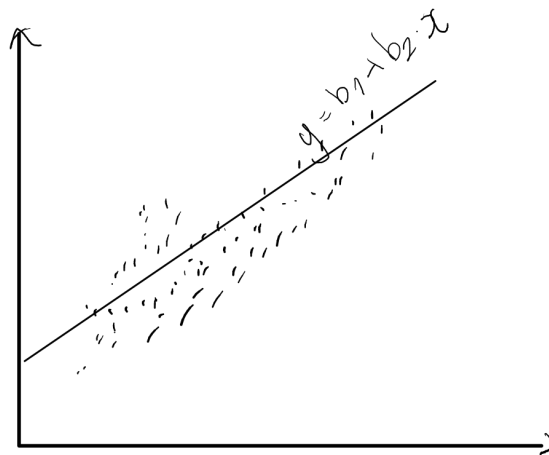
$$r^* = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + n - 2}} \quad r^* \approx 0,38$$

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0,41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,51 & 0 & 0,6 \\ 0,41 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,38 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0,62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0,47 & 0 & 0,39 \\ 0 & 0 & -0,62 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,51 & -0,38 & 0 & 0 & 0,47 & 0 & 1 & -0,58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,58 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0,39 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


Rysunek 3: Graf z macierzy

Zatem wybieramy zmienne X_4, X_6, X_7

1.6 Metoda Najmniejszych Kwadratów



Rysunek 4: wykres

Za pomocą tej metody szacujemy nieznane parametry modelu. Uzyskujemy w ten sposób oszacowania dla których model najlepiej opisuje zaobserwowane dane.

Najczęściej stosowanym modelem jest model liniowy. W modelu tym zakłada się że związek między zmienną objaśnianą i zmiennymi objaśniającymi jest liniowy

$$y_i = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_k\beta_k + \varepsilon, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N$$

Przy czym

- y_i jest zmienną objaśnianą (endogeniczną, zależną),
- x_1, x_2, \dots, x_k są zmiennymi objaśniającymi (egzogenicznymi, niezależnymi) Zmiennych tych jest k .
- ε jest błędem losowym
- i jest indeksem obserwacji
- N jest liczbą obserwacji

Znajdowanie estymatora (oszacowania) MNK (Metoda Najmniejszych Kwadratów) parametrów $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ określamy mianem regresji liniowej, y_i na x_1, x_2, \dots, x_k . Zgodnie z przyjętą konwencją oszacowania nieznanymi parametrów $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ uzyskamy za pomocą MNK oznaczamy jako b_1, b_2, \dots, b_k . Przewidywane na podstawie oszacowanego modelu wartości zmiennej zależnej, nazywane **wartością dopasowaną** (teoretyczną):

$$\hat{y}_i = x_{1i}b_1 + x_{2i}b_2 + \dots + x_{ki}b_k$$

Wartości dopasowane różnią się od rzeczywistych wartości y_i , ponieważ w modelu oszacowanym zamiast prawdziwych nieznanymi parametrów $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ używamy ich oszacowań b_1, b_2, \dots, b_k i pomijamy błąd losowy.

Reszty definiujemy jako różnicę między wartością zaobserwowaną zmiennej zależnej, a wartością dopasowaną tej zmiennej:

$$e_i = y_i - x_{1i}b_1 - x_{2i}b_2 - \dots - x_{ki}b_k = y_i - \hat{y}_i$$

Omówienie MNK zaczniemy od przypadku modelu liniowego ze stałą i jedną zmienną objaśniającą. W tym przypadku model teoretyczny opisuje równanie:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

Model wyestymowany dany jest równaniem

$$\hat{y}_i = b_1 + b_2 x_i + e_i$$

a reszty dla każdej obserwacji będą dane wzorem

$$e_i = y_i - b_1 - b_2 x_i$$

Oszacowania b_1, b_2 powinny być dobrane tak, aby **Suma Kwadratów Reszt (SKR)** była najmniejsza. Suma ta jest równa

$$\begin{aligned} \text{SKR}(b_1, b_2) &= \sum_{i=1}^N e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (y_i - b_1 - b_2 x_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (y_i^2 - 2b_1 y_i - 2b_2 y_i x_i + 2b_1 b_2 x_i + b_1^2 + b_2^2 x_i^2) \\ \frac{\partial \text{SKR}(b_1, b_2)}{\partial b_1} &= 0 \quad \frac{\partial \text{SKR}(b_1, b_2)}{\partial b_2} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \text{SKR}(b_1, b_2)}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^N (-2y_i + 2b_2x_i + 2b_1)$$

$$\frac{\partial \text{SKR}(b_1, b_2)}{\partial b_2} = \sum_{i=1}^N (-2y_ix_i + 2b_1x_i + 2b_2x_i^2)$$

$$\sum_{i=1}^N (-2y_i + 2b_2x_i + 2b_1) = 0 \quad | : 2$$

$$\sum_{i=1}^N b_2x_i + \sum_{i=1}^N b_1 = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$b_2 \sum_{i=1}^N x_i + b_1 \sum_{i=1}^N 1 = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$b_2 \sum_{i=1}^N x_i + Nb_1 = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - b_2 \sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2\bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^N (-2y_ix_i) + \sum_{i=1}^N 2b_1x_i + \sum_{i=1}^N 2b_2x_i^2 = 0 \quad | : 2$$

$$b_1 \sum_{i=1}^N x_i + b_2 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_iy_i \quad | : N$$

$$b_1 \cdot \bar{x} + b_2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_iy_i}{N}$$

$$(\bar{y} - b_2\bar{x})\bar{x} + b_2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_iy_i}{N}$$

$$\bar{y}\bar{x} - b_2(\bar{x})^2 + b_2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_iy_i}{N}$$

$$b_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \right) = \frac{\sum_{i=1}^N x_iy_i}{N} - \bar{y}\bar{x}$$

$$b_2 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^N x_iy_i}{N} - \bar{y}\bar{x}}{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - (\bar{x})^2}$$

Ocena wariancji odchyłeń losowych modelu liniowego z jedną zmienną objaśniającą otrzymujemy ze wzoru

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{N - 2}$$

Wielkość s_e jest odchyleniem standardowym reszt modelu które informuje o ile zaobserwowane wartości zmiennej objaśnianej przeciętnie różnią się od teoretycznych wartości tej zmiennej wyznaczonych z modelu.

Standardowe błędy $S(b_2)$, $S(b_1)$ szacunku parametrów strukturalnych β_2 , β_1 wyznaczamy ze wzorów

$$S(b_2) = \frac{s_e}{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 - N(\bar{x})^2}} \text{ lub } S(b_2) = \frac{s_e}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}$$

$$S(b_1) = s_e \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N(\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{x}^2)}} \text{ lub } S(b_1) = s_e \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}$$

1.7 Zapis macierzowy modelu liniowego

Model liniowy ze stałą i jedną zmienną objaśniającą to szczególny przypadek modelu z k zmiennymi objaśniającymi.

Założmy, że zmienna zależy w następujący sposób od zmiennych objaśniających

$$y_i = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_k\beta_k + \varepsilon_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N$$

Równanie to dla wszystkich obserwacji można zapisać za pomocą równania macierzowego

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{y_{N \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{k1} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1N} & x_{2N} & \cdots & x_{kN} \end{bmatrix}}_{X_{N \times k}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}}_{\beta_{k \times 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}}_{\varepsilon_{N \times 1}}$$

gdzie

- $y_{N \times 1}$ jest wektorem obserwacji dla zmiennej zależnej
- $X_{N \times k}$ jest obserwacji zmiennych niezależnych
- $\beta_{k \times 1}$ jest niezależnych parametrów,
- $\varepsilon_{N \times 1}$ jest wektorem zaburzeń losowych

stosując ten zapis można model liniowy zapisać za pomocą następującego równania macierzowego

$$y = X\beta + \varepsilon$$

Przy takim zapisie wektor kolumnowy y zawiera wszystkie obserwacje dla zmiennej zależnej, zaś kolejne kolumny macierzy X zawierają obserwacje dla kolejnych zmiennych objaśniających modelu

1.8 MNK dla wielu zmiennych objaśniających

Wektor nieznanych parametrów oznaczmy jako $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k]^T$ zaś uzyskany dla tych parametrów wektor oszacowań (estymator) oznaczmy jako $b = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T$. W tym przypadku wartość dopasowana (teoretyczna) y_i jest równa

$$\hat{y}_i = x_{1i}b_1 + x_{2i}b_2 + \dots + x_{ki}b_k = x_i b$$

wektor wartości dopasowanych można zapisać jako

$$\hat{y} = Xb$$

Podobnie reszta jest równa:

$$e_i = y_i - x_{1i}b_1 - x_{2i}b_2 - \dots - x_{ki}b_k = y_i - x_i b = y_i - \hat{y}_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N$$

zatem wektor reszt można zapisać jako

$$e = y - Xb = y - \hat{y}$$

Model jest dobrze dopasowany do danych, jeśli wartości dopasowane zmiennej zależnej są bliskie zaobserwowanym wartościom zmiennej zależnej.

Estymator MNK znajdujemy minimalizując sumę kwadratów reszt

$$\text{SKR}(b) = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N e_i^2$$

zatem

$$\min_b \text{SKR}(b) = \min_b \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \min_b \sum_{i=1}^N e_i^2$$

$\text{SKR} \sum_{i=1}^N e_i^2$ można zapisać przy użyciu iloczynu skalarnego $e^T e$:

$$e^T e = [e_1, e_2, \dots, e_N] \circ \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N e_i^2$$

$$\begin{aligned} \text{SKR}(b) &= e^T e \\ &\stackrel{(x)}{=} (y - Xb)^T (y - Xb) \\ &= (y^T - (Xb)^T)(y - Xb) \\ &= (y^T - b^T X^T)(y - Xb) = y^T y - y^T Xb - b^T X^T y + b^T X^T Xb \end{aligned}$$

$$\text{SKR}(b) = y^T y - 2y^T Xb + b^T X^T Xb$$

$$\frac{\partial \text{SKR}(b)}{\partial b} = \frac{\partial (y^T y - 2y^T Xb + b^T X^T Xb)}{\partial b}$$

Achtung! 1: Przydatne wzory

$$\frac{\partial wx}{\partial x} = w^T$$

$$\frac{\partial x^T Ax}{\partial x} = (A + A^T)x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{SKR}(b)}{\partial b} &= \frac{\partial y^T y}{\partial b} - 2 \frac{\partial y^T Xb}{\partial b} + \frac{\partial b^T X^T Xb}{\partial b} \\ &= -2(y^T X)^T + 2X^T Xb \end{aligned}$$

$$\text{SKR}(b) = 0$$

$$\iff -2X^T y + 2X^T Xb = 0 \quad | : 2$$

$$\iff X^T Xb = X^T y$$

$$\iff b = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Wariancja odchyłeń losowych szacuje się na podstawie wzoru

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N - k - 1}, \quad \text{gdzie } k \text{ to liczba zmiennych objaśniających}$$

Macierz wariancji i kowariancji ocen parametrów strukturalnych szacuje się na podstawie wzoru

$$D^2(b) = s_e^2 (x^T x)^{-1}$$

W macierzy tej elementy na głównej przekątnej są wariancjami

$V(b_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) oraz parametrów strukturalnych. Wielkości

$$S(b_i) = \sqrt{V(b_i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

są standardowymi błędami szacunku parametrów strukturalnych.

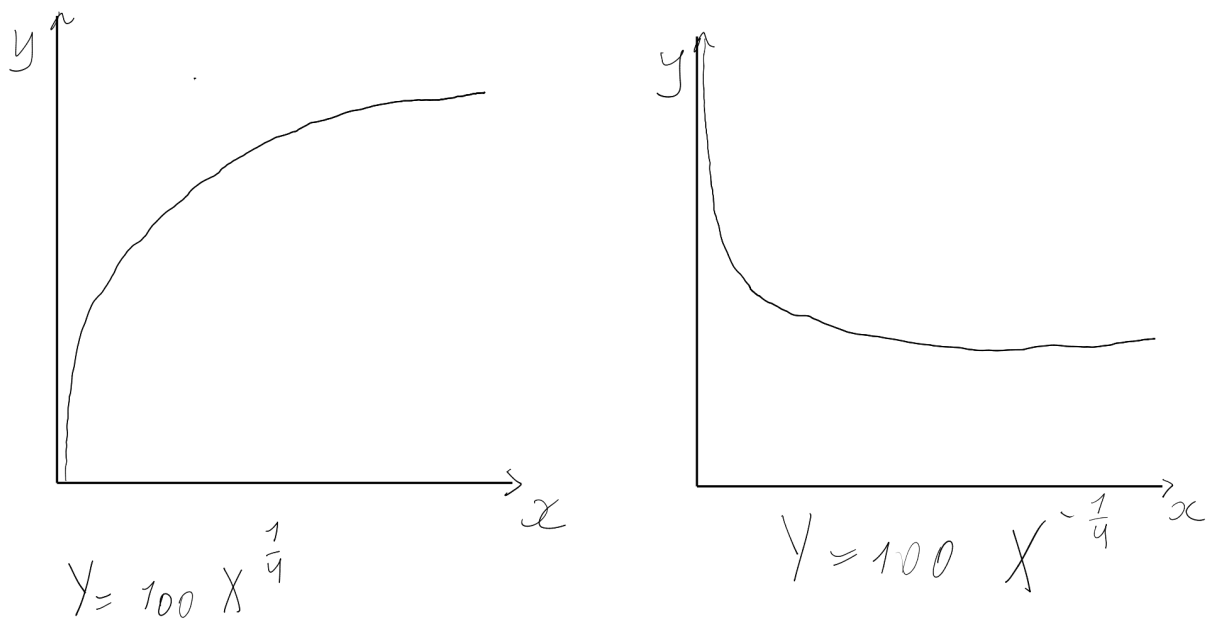
1.9 Typy modeli

1.9.1 Model liniowy

Np. $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$

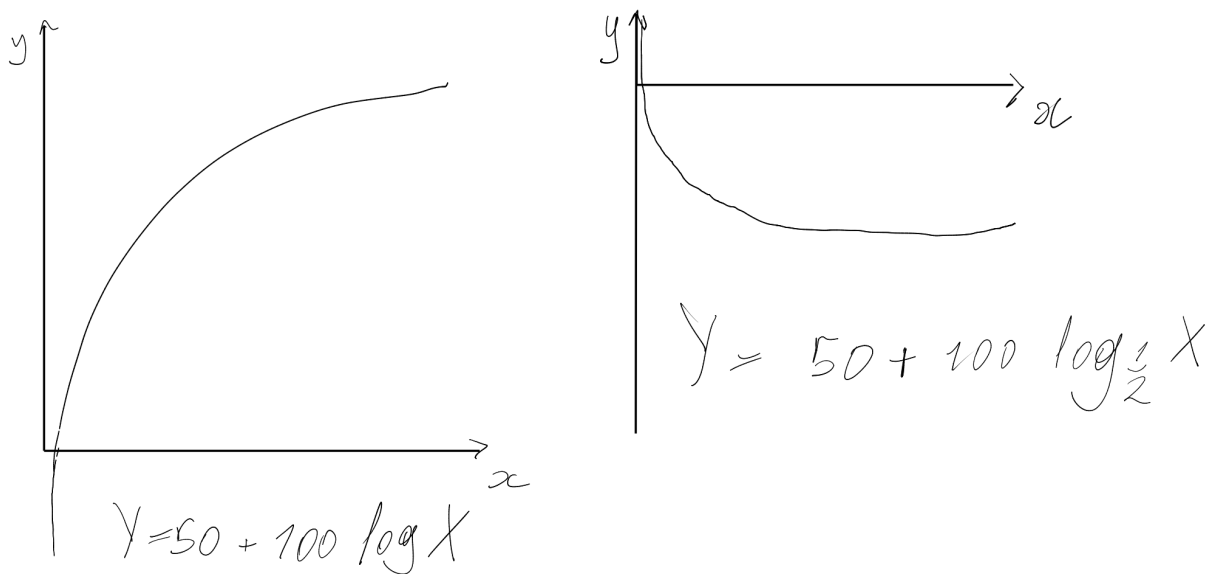
1.9.2 Model potęgowy

Np. $Y = \alpha X^\beta, Y = \alpha_0 X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2}$

**Rysunek 5:** wykresy

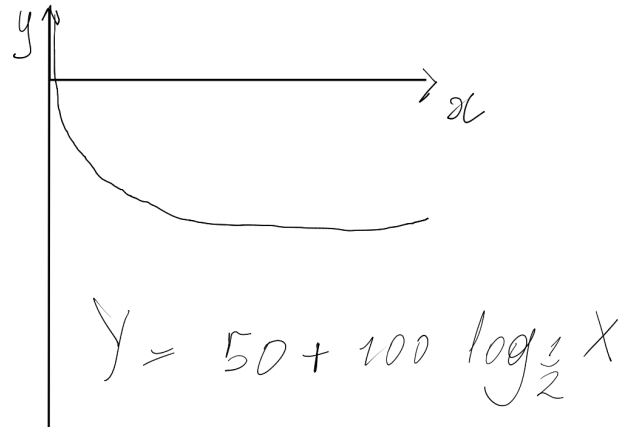
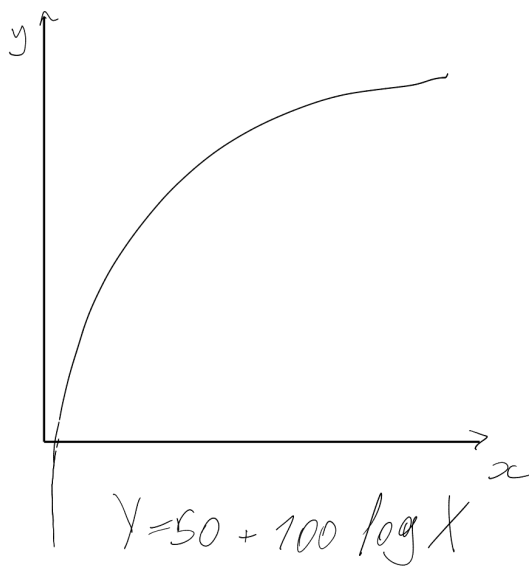
1.9.3 Model logarytmiczny

Np. $Y = \alpha + \beta \log X$

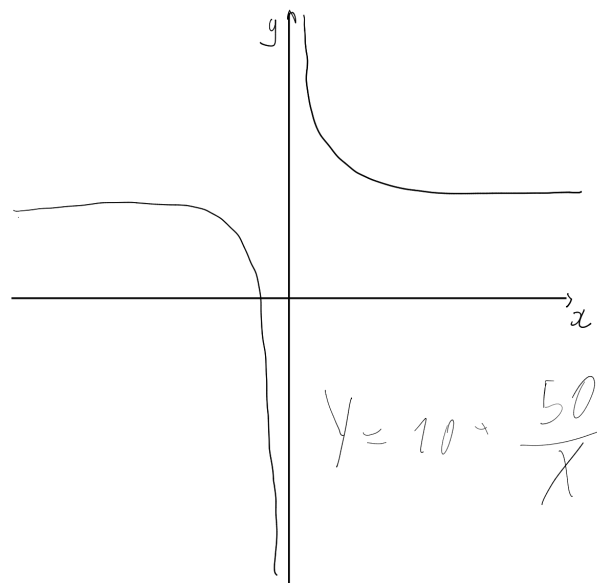
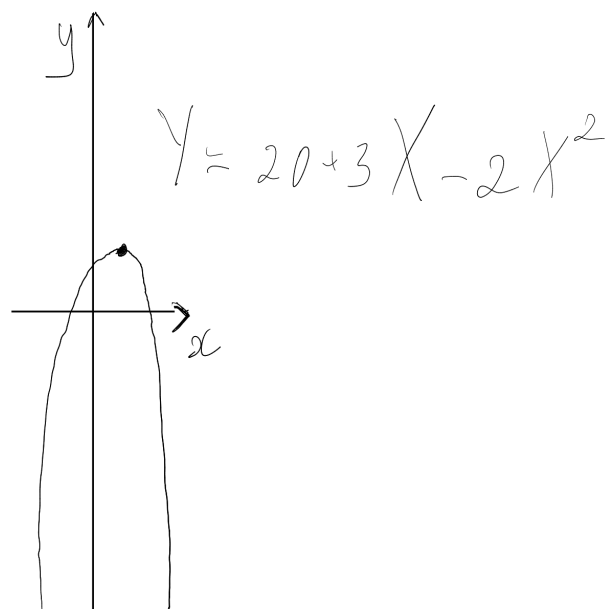
**Rysunek 6:** wykresy

1.9.4 Model wykładniczy

Np. $Y = \alpha \cdot \beta^X$

**Rysunek 7:** wykresy**1.9.5 Model hiperboliczny**

Np. $Y = \alpha + \frac{\beta}{X}$

**Rysunek 8:** wykres**1.9.6 Model wielomianowy**Np. $Y = \alpha_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$ **Rysunek 9:** wykres

1.9.7 Model trygonometryczny

Niech zmienna Y_t przyjmuje w kolejnych chwilach czasu t wartości.

t	1	2	...	$N-1$	N
Y_t	y_1	y_2	...	Y_{N-1}	Y_N

Modelem trygonometrycznym o okresie ω rzędu p_i zmiennej Y_t nazywamy funkcję

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t = & \hat{\alpha} + \underbrace{\hat{\alpha}_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right)}_{C_{t1}} + \underbrace{\hat{\beta}_1 \sin\left(\frac{2\pi}{\omega}t\right)}_{S_{t1}} \\ & + \hat{\alpha}_2 \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}t\right) + \hat{\beta}_2 \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}t\right) + \\ & + \dots \\ & + \hat{\alpha}_p \cos\left(p \cdot \frac{2\pi}{\omega}t\right) + \hat{\beta}_p \sin\left(p \cdot \frac{2\pi}{\omega}t\right) \end{aligned}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot 1\right) \\ \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot 2\right) \\ \vdots \\ \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \omega\right) \end{bmatrix}_{\omega \times 1} \quad S_k = \begin{bmatrix} \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot 1\right) \\ \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot 2\right) \\ \vdots \\ \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cdot \omega\right) \end{bmatrix}_{\omega \times 1}$$

Przypadek ω parzystej

$$\hat{\alpha} = \bar{y} \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_\omega]^T$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_k &= \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} (C_{ki} Y_i) & \hat{\beta}_k &= \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} (S_{ki} Y_i) & \text{dla } k < \frac{\omega}{2} \\ \hat{\alpha}_k &= \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} (C_{ki} Y_i) & \hat{\beta}_k &= 0 & \text{dla } k = \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

Przypadek ω nieparzystej

$$\hat{\alpha} = \bar{y} \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_\omega]^T$$

$$\hat{\alpha}_k = \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} (C_{ki} Y_i) \quad \hat{\beta}_k = \frac{2}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} (S_{ki} Y_i) \quad \text{dla } k \leq \frac{\omega-1}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\omega} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\omega - 1}}$$

Przykład 1.7

Stosując odpowiednią zamianę zmiennych zamień modele

- a. $Y = \alpha + \beta \log X$
- b. $Y = \alpha X^\beta$
- c. $Y = \beta^X$
- d. $Y = \alpha + \frac{\beta}{X}$

na modele liniowe

-
- a. $X^* = \log X, \quad Y = \alpha + \beta X^*$
 - b. Obustronnie logarytmujemy.
 $\log Y = \log \alpha + \beta \log X.$
 $Y^* = \log Y, \alpha^* = \log \alpha, X^* = \log X$
 $Y^* = \alpha^* + \beta X^*$
 - c. Obustronnie logarytmujemy.
 $\log Y = X \log \beta$
 $Y^* = \log Y, \beta^* = \log \beta$
 $Y^* = \beta^* X$
 - d. $X^* = \frac{1}{X}, \quad Y = \alpha + \beta X^*$

1.10 Przykłady**1.10.1 Model konsumpcji**

Przez Y_t oznaczamy całkowity popyt konsumpcyjny w miesiącu t , a przez X_t dochody gospodarstw domowych w tym okresie. Przyjmujemy, że

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \varepsilon_t$$

gdzie

- α_0 – wydatki stałe
- α_1 – część dochodów przeznaczona na konsumpcję
- ε_t – składnik losowy

1.10.2 Model oszczędności

Przez Y_t oznaczamy stan oszczędności na koniec miesiąca t , a przez X_t dochody gospodarstw domowych w tym miesiącu. Przyjmujemy, że

$$Y_t = Y_{t-1} - \beta_0 + \beta_1 X_t - \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

gdzie

- β_0 – wydatki stałe
- β_1 – część dochodów przeznaczona na oszczędności
- β_2 – część oszczędności przeznaczona na konsumpcję
- ε_t – składnik losowy

1.10.3 Model konsumpcji z uwzględnieniem oszczędności

Przez $Y_{1,t}$ oznaczamy całkowity popyt konsumpcyjny w miesiącu t , przez $Y_{2,t}$ oznaczamy stan oszczędności, a przez X_t dochody gospodarstw domowych w tym okresie.

Przyjmujemy, że

$$Y_{1,t} = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t}$$
$$Y_{2,t} = Y_{2,t-1} - \beta_0 + \beta_1 X_t - \beta_2 Y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t}$$

gdzie

- $\beta_0 = \alpha_0$
- $\beta_1 + \alpha_1 = 1$
- $\beta_2 = \alpha_2$

1.10.4 Model popytu dla dóbr konsumpcyjnych

Przez Y_t oznaczamy popyt dla wybranego dobra konsumpcyjnego przez $X_{1,t}$ jego cenę, a przez $X_{2,t}$ dochody nabywcy

Przyjmujemy, że

$$Y_t = c \cdot X_{1,t}^\alpha X_{2,t}^\beta e^{\varepsilon_t} \quad c > 0, \alpha < 0, \beta > 0$$

1.10.5 Model stochastyczny kursu walutowego

Niech Y_t oznacza kurs 1 USD w EUR w dniu t . Przyjujemy

$$Y_t = Y_{t,1} e^{\varepsilon_t}$$

1.10.6 Model wydajności pracy

Niech Y_t oznacza wydajność pracy w PLN na pracownika,

a X_t techniczne uzbrojenie miejsce pracy też w PLN na 1 pracownika.

Przyjmujemy, że

$$Y_j = \gamma X_t^\alpha e^{\delta t + \varepsilon_t}, \quad \gamma, \alpha > 0$$

gdzie

- δ – współczynnik mierzący skalę postępu technicznego organizacyjnego

1.11 Klasyfikacja modeli ekonometrycznych

1.11.1 Klasyfikacja ze względu na dynamikę

- Modele statyczne (jednookresowe) charakteryzujące się brakiem zależności od czasu (tzn. wśród zmiennych objaśniających nie ma opóźnionych zmiennych objaśnianych). Np. ...
- Modele dynamiczne – zależne od czasu lub od opóźnionych zmiennych objaśnianych. Np. ...

1.11.2 Klasyfikacja ze względu na postać analityczną modelu

- Modele liniowe. Np. ...
- Modele nieliniowe. Np. ...

1.11.3 Klasyfikacja ze względu na wymiar zmiennej objaśnianej

- a) Modele jednorównaniowe. Np. ...
 - b) Modele wielorównaniowe. Np. ...
-

2025-04-02

1.12 Modele wielorównaniowe

Wielorównaniowe modele ekonometryczne opisują kształtowanie się wielu zjawisk ekonomicznych, przy czym każde równanie modelu wielorównaniowego wyjaśnia zachowanie się jednego zjawiska.

Zmienne endogeniczne Zjawiska ekonomiczne wyjaśniane przez model wielorównaniowy nazywają się zmiennymi endogenicznymi.

Zmienne egzogeniczne Zjawiska ekonomiczne, które niosą wyjaśnienie przez model i służą do wyjaśnienia zmiennych endogenicznych nazywają się zmiennymi egzogenicznymi.

Zmienne łącznie współzależne Zmienne endogeniczne bez opóźnień czasowych nazywają się łącznie współzależnymi, będziemy oznaczać Y_1, Y_2, \dots, Y_n .

Zmienne z góry ustalone Zmienne endogeniczne z opóźnieniami czasowymi oraz zmienne egzogeniczne (bez opóźnień i z opóźnieniami) nazywają się zmiennymi z góry ustalonymi. Będziemy je oznaczać Z_1, Z_2, \dots, Z_k .

Ogólny zapis modelu wielorównaniowego jest następujący:

$$Y_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^m \beta_{1i} Y_i + \sum_{j=1}^k \gamma_{1j} Z_j + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^m \beta_{2i} Y_i + \sum_{j=1}^k \gamma_{2j} Z_j + \varepsilon_2$$

$$Y_3 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^m \beta_{3i} Y_i + \sum_{j=1}^k \gamma_{3j} Z_j + \varepsilon_3$$

⋮

$$Y_{m-1} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m-1}}^m \beta_{m-1 i} Y_i + \sum_{j=1}^k \gamma_{m-1 j} Z_j + \varepsilon_{m-1}$$

$$Y_m = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^m \beta_{mi} Y_i + \sum_{j=1}^k \gamma_{mj} Z_j + \varepsilon_m$$

1.12.1 Postać strukturalna modelu

Postać strukturalna Macierzowe przedstawienie modelu wielorównaniowego (*) nosi nazwę postaci strukturalnej.

Aby otrzymać tę postać należy przenieść wszystkie wyrazy modelu na lewą stronę, a po prawej stronie zostawić jedynie odchylenie losowe.

Postać strukturalna modelu wielorównaniowego jest następująca:

$$B \cdot Y + \Gamma \cdot Z = \varepsilon$$

gdzie

$$\bullet Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \quad \text{– wektor zmiennych endogenicznych bez opóźnień czasowych}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet B &= \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & \cdots & -\beta_{1m} \\ -\beta_{21} & 1 & \cdots & -\beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta_{m1} & -\beta_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m} && \text{– macierz parametrów przy zmiennych endogenicz-} \\
 &&& \text{nych bez opóźnień czasowych} \\
 \bullet Z &= \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_k \end{bmatrix}_{k \times 1} && \text{– wektor zmiennych z góry ustalonych} \\
 \bullet \Gamma &= \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & \cdots & -\gamma_{1k} \\ -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & \cdots & -\gamma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{m1} & -\gamma_{m2} & \cdots & -\gamma_{mk} \end{bmatrix}_{m \times k} && \text{– macierz parametrów przy zmiennych z góry ustalonych} \\
 \bullet \varepsilon &= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}_{m \times 1} && \text{– wektor odchyleń losowych}
 \end{aligned}$$

Jeśli nieopóźnione w czasie zmienne endogeniczne Y_1, Y_2, \dots, Y_m wyrazimy jedynie poprzez zmienne z góry ustalone całego modelu Z_1, Z_2, \dots, Z_k , to otrzymamy postać zredukowaną modelu:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \sum_{j=1}^k \pi_{1j} Z_j + \eta_1 \\
 Y_2 &= \sum_{j=1}^k \pi_{2j} Z_j + \eta_2 \\
 &\vdots \\
 Y_m &= \sum_{j=1}^k \pi_{mj} Z_j + \eta_m
 \end{aligned}$$

1.12.2 Postać zredukowana

Zapis macierzy postaci zredukowanej jest następujący:

$$Y = \Pi^T \cdot Z + \eta$$

gdzie

$$\bullet \Pi^T = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1k} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{m1} & \pi_{m2} & \cdots & \pi_{mk} \end{bmatrix}_{m \times k}$$

– macierz parametrów postaci zredukowanej przy zmien-

nach z góry ustalonych

$$\bullet \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

– wektor odchyłeń losowych postaci zredukowanej

Między parametrami postaci zredukowanej i postaci strukturalnej następują następujące zależności:

$$\Pi^T = -B^{-1} \cdot \Gamma \quad \eta = B^{-1}\varepsilon$$

Przykład 1.8

Rozważmy następujący model:

$$I_t = \beta_{13}P_t + \gamma_{11}I_{t-1} + \gamma_1 + \varepsilon_1$$

$$Z_t = \beta_{23}P_t + \gamma_{22}K_t + \gamma_2 + \varepsilon_2$$

$$P_t = \beta_{32}Z_t + \gamma_{31}I_{t-1} + \gamma_3 + \varepsilon_3$$

gdzie

- I – nakłady inwestycyjne
- Z – zatrudnienie
- P – produkcja
- K – wartości produkcyjnego majątku trwałego
- Przez X_t oznaczmy zmienne przyjmujące wartości równe jedności znajdujące się przy parametrach $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ (czyli de facto musimy mieć $\gamma_1 X_t$ w miejscu γ_1 , ale ponieważ $X_t = \text{const} = 1$, to piszemy jedynie γ_1 ale nadal pamiętamy o tej zmiennej)

Zadanie:

- Dokonać klasyfikacji zmiennych na endogeniczne, egzogeniczne, łącznie współzależne, z góry ustalone
- Napisać postać strukturalną modelu
- Napisać postać zredukowaną modelu
- Wyrazić parametry i składniki losowe postaci zredukowanej jako funkcje tych wielkości z postaci strukturalnej

Rozwiązanie

- a) Zmienne endogeniczne to I_t, Z_t, P_t .

Zmienne egzogeniczne to K_t, X_t .

Zmienne łącznie współzależne: I_t, Z_t, P_t .

Zmienne z góry ustalone:

- endogeniczne z opóźnieniami czasowymi: I_{t-1} .
- egzogeniczne bez opóźnień czasowych: K_t, X_t

- b)

$$I_t - \beta_{13}P_t - \gamma_{11}I_{t-1} - \gamma_1 = \varepsilon_1$$

$$Z_t - \beta_{23}P_t - \gamma_{22}K_t - \gamma_2 = \varepsilon_2$$

$$P_t - \beta_{32}Z_t - \gamma_{31}I_{t-1} - \gamma_3 = \varepsilon_3$$

- c)

$$BY + \Gamma Z = \varepsilon$$

$$Y = \begin{bmatrix} I_t \\ Z_t \\ P_t \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_{13} \\ 0 & 1 & -\beta_{23} \\ \underbrace{0}_{I_t} & \underbrace{-\beta_{32}}_{Z_t} & \underbrace{1}_{P_t} \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} I_{t-1} \\ K_t \\ X_t \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & -\gamma_{22} & -\gamma_2 \\ \underbrace{-\gamma_{31}}_{I_{t-1}} & \underbrace{0}_{K_t} & \underbrace{-\gamma_3}_{X_t} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$I_t = \pi_{11}I_{t-1} + \pi_{12}K_t + \pi_{13}X_t + \eta_1$$

$$Z_t = \pi_{21}I_{t-1} + \pi_{22}K_t + \pi_{23}X_t + \eta_2$$

$$P_t = \pi_{31}I_{t-1} + \pi_{32}K_t + \pi_{33}X_t + \eta_3$$

$$\begin{bmatrix} I_t \\ Z_t \\ P_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{t-1} \\ K_t \\ X_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

d)

$$\Pi^T = -B^{-1} \cdot \Gamma$$

$$\eta = B^{-1} \cdot \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \Pi^T &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta_{13}\beta_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \frac{\beta_{13}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} \\ 0 & \frac{1}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \frac{\beta_{23}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} \\ 0 & \frac{\beta_{32}}{1-\beta_{23}\beta_{32}} & \frac{1}{1-\beta_{23}\beta_{32}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & -\gamma_{22} & -\gamma_2 \\ -\gamma_{31} & 0 & -\gamma_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta_{23}\beta_{32}\gamma_{11} - \beta_{13}\gamma_{31} - \gamma_{11}}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} & \frac{-\beta_{13}\beta_{32}\gamma_{22}}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} & \frac{\beta_{23}\beta_{32}\gamma_1 - \beta_{13}\beta_{32}\gamma_2 - \beta_{13}\gamma_3 - \gamma_1}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} \\ \frac{-\beta_{23}\gamma_{31}}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} & \frac{-\gamma_{22}}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} & \frac{-\beta_{23}\gamma_3 - \gamma_2}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} \\ \frac{-\gamma_{31}}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} & \frac{-\beta_{32}\gamma_{22}}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} & \frac{-\beta_{32}\gamma_2 - \gamma_3}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\eta = B^{-1}\varepsilon = \frac{1}{\beta_{23}\beta_{32} - 1} \cdot \begin{bmatrix} -\beta_{23}\beta_{32}\varepsilon_1 + \beta_{13}\beta_{32}\varepsilon_2 + \beta_{13}\varepsilon_3 + \varepsilon_1 \\ \beta_{23}\varepsilon_3 + \varepsilon_2 \\ \beta_{32}\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Achtung! 2

Lubię dawać takie coś na egzaminie za 5 punktów

(c) Dr Makarewicz-Trzeźniewska

1.13 Klasyfikacja modeli wielorównaniowych

Ze względu na powiązania między nieopóźnionymi w czasie zmiennymi endogenicznymi modele wielorównaniowe klasyfikuje się na:

- modele proste
- modele rekurencyjne
- modele o równaniach współzależnych.

Klasyfikacja ta jest istotna z punktu widzenia metody szacowania parametrów. Rozpoznanie klasy modelu wielorównaniowego dokonuje się poprzez badanie własności macierzy B parametrów strukturalnych znajdujących się przy zmiennych endogenicznych bez opóźnień czasowych.

- Jeśli macierz B jest macierzą diagonalną lub okaże się taka po przenieściu równań modelu, to model nazywamy **prostym**
- Jeśli macierz B jest macierzą trójkątną lub okaże się taką po przenieściu równań modelu albo po zamianie miejsca zmiennych w równaniach, to model nazywamy **rekurencyjnym**.
- Jeśli w wyniku przenieściu równań lub zamiany miejsca zmiennych w równaniach nie otrzymamy z macierzy B ani macierzy diagonalnej, ani macierzy trójkątnej, to model jest modelem **o równaniach współzależnych**

Przykład 1.9

W przedsiębiorstwie znajdują się 3 zakłady.

Produkty wytwarzane w poszczególnych zakładach nie są wykorzystywane w pozostałych zakładach. Oznacza to, że produkcja danego zakładu jest niezależna od produkcji pozostałych zakładów.

Zbudowano model opisujący zależność produkcji poszczególnych zakładów P_1, P_2, P_3 od zatrudnienia w tych zakładach Z_1, Z_2, Z_3 oraz od wartości produkcyjnego majątku trwałego K_1, K_2, K_3

$$P_1 = \alpha_{11}Z_1 + \alpha_{12}K_1 + \alpha_1 + \varepsilon_1$$

$$P_2 = \alpha_{21}Z_2 + \alpha_{22}K_2 + \alpha_2 + \varepsilon_2$$

$$P_3 = \alpha_{31}Z_3 + \alpha_{32}K_3 + \alpha_3 + \varepsilon_3$$

Przerzucamy wszystko poza ε przed znak równości

$$P_1 - \alpha_{11}Z_1 - \alpha_{12}K_1 - \alpha_1 = \varepsilon_1$$

$$P_2 - \alpha_{21}Z_2 - \alpha_{22}K_2 - \alpha_2 = \varepsilon_2$$

$$P_3 - \alpha_{31}Z_3 - \alpha_{32}K_3 - \alpha_3 = \varepsilon_3$$

Dokonać klasyfikacji tego modelu

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ macierz parametrów jest diagonalna to model jest prosty

Przykład 1.10

Przedsiębiorstwo jest przedsiębiorstwem trzyzakładowym. Produkcja pierwszego zakładu nie zależy od produkcji dwóch pozostałych, natomiast jest przekazywana do zakładu drugiego. Z kolei produkcja drugiego zakładu jest przekazywana do trzeciego zakładu.

Zbudować następujący model:

$$\begin{aligned} P_1 &= \gamma_{11}Z_1 + \gamma_{12}K_1 + \gamma_1 + \varepsilon_1 \\ P_2 &= \beta_{21}P_1 + \gamma_{23}Z_2 + \gamma_{24}K_2 + \gamma_2 + \varepsilon_2 \\ P_3 &= \beta_{32}P_2 + \gamma_{35}Z_3 + \gamma_{36}K_3 + \gamma_3 + \varepsilon_3 \end{aligned}$$

gdzie

- P_1, P_2, P_3 – produkcja
- Z_1, Z_2, Z_3 – zatrudnienie
- K_1, K_2, K_3 – majątek trwały

Określ typ tego modelu.

Przekształćmy równania:

$$\begin{aligned} P_1 - \gamma_{11}Z_1 - \gamma_{12}K_1 - \gamma_1 &= \varepsilon_1 \\ P_2 - \beta_{21}P_1 - \gamma_{23}Z_2 - \gamma_{24}K_2 - \gamma_2 &= \varepsilon_2 \\ P_3 - \beta_{32}P_2 - \gamma_{35}Z_3 - \gamma_{36}K_3 - \gamma_3 &= \varepsilon_3 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz jest dolnie trójkątna, zatem to jest model rekurencyjny.

Przykład 1.11

Przedsiębiorstwo jest przedsiębiorstwem trzyzakładowym.

- Produkcja pierwszego zakładu jest przekazywana do zakładów drugiego i trzeciego.
- Produkcja drugiego zakładu jest przekazywana częściowo do pierwszego zakładu.
- Produkcja trzeciego zakładu jest przekazywana do drugiego zakładu

Na tej podstawie

$$P_1 = \beta_{12}P_2 + \gamma_{11}Z_1 + \gamma_{12}K_1 + \gamma_1 + \varepsilon_1$$

$$P_2 = \beta_{21}P_1 + \beta_{23}P_3 + \gamma_{23}Z_2 + \gamma_{24}K_2 + \gamma_2 + \varepsilon_2$$

$$P_3 = \beta_{31}P_1 + \gamma_{35}Z_3 + \gamma_{36}K_3 + \gamma_3 + \varepsilon_3$$

Zbadaj typ modelu

Przekształćmy równania:

$$P_1 - \beta_{12}P_2 - \gamma_{11}Z_1 - \gamma_{12}K_1 - \gamma_1 = \varepsilon_1$$

$$P_2 - \beta_{21}P_1 - \beta_{23}P_3 - \gamma_{23}Z_2 - \gamma_{24}K_2 - \gamma_2 = \varepsilon_2$$

$$P_3 - \beta_{31}P_1 - \gamma_{35}Z_3 - \gamma_{36}K_3 - \gamma_3 = \varepsilon_3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & -\beta_{23} \\ -\beta_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem jest to model o równaniach współzależnych

W wielorównaniowych modelach prostych i rekurencyjnych nie występują sprzężenia zwrotne między nieopóźnionymi w czasie zmiennymi endogenicznymi.

Dlatego każde równanie tych modeli można rozpatrywać osobno i traktować jako model jednorównaniowy. Parametry każdego równania mogą być szacowane odrębnie za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów.

1.14 Identyfikowalność modeli o równaniach współzależnych

Jeśli równanie jest identyfikowalne, to można oszacować jego parametry. Jeśli równanie nie jest identyfikowalne to nie można oszacować jego parametrów. Cały model o równaniach współzależnych jest identyfikowalny jeśli wszystkie jego równania są identyfikowalne.

Twierdzenie 1.1

i -te równanie wchodzące w skład modelu o m równaniach współzależnych jest **identyfikowalne** wtw, gdy macierz A_i jest rzędu $m - 1$.

gdzie

- A_i – macierz parametrów znajdujących się przy zmiennych które są w modelu a nie występują w i -tym równaniu.
- m – liczba równań

Niech k_i oznacza liczbę zmiennych, które znajdują się w modelu a nie występują w równaniu, którego identyfikowalność jest badana.

- Jeśli $k_i = m - 1$, to równanie jest jednoznacznie identyfikowalne.
- Jeśli $k_i > m - 1$, to równanie jest niejednoznacznie identyfikowalne.
- Jeśli $k_i < m - 1$, to równanie nie jest identyfikowalne.

Przykład 1.12

Dany jest model

$$Y_1 = \beta_{12}Y_2 + \beta_{13}Y_3 + \gamma_{11}X_1 + \gamma_1 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = \beta_{21}Y_1 + \gamma_{22}X_2 + \gamma_2 + \varepsilon_2$$

$$Y_3 = \beta_{32}Y_2 + \gamma_{31}X_1 + \gamma_{33}X_3 + \gamma_3 + \varepsilon_3$$

gdzie

- Y_1 – wielkość produkcji
- Y_2 – wartość produkcyjnego majątku trwałego
- Y_3 – zatrudnienie
- X_1 – dostawy surowców
- X_2 – nakłady inwestycyjne
- X_3 – zatrudnienie z rocznym opóźnieniem

Dokonać identyfikowalności modelu

$$Y_1 - \beta_{12}Y_2 - \beta_{13}Y_3 - \gamma_{11}X_1 - \gamma_1 = \varepsilon_1$$

$$Y_2 - \beta_{21}Y_1 - \gamma_{22}X_2 - \gamma_2 = \varepsilon_2$$

$$Y_3 - \beta_{32}Y_2 - \gamma_{31}X_1 - \gamma_{33}X_3 - \gamma_3 = \varepsilon_3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\beta_{13} \\ -\beta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Równanie I

$$A_1 = \begin{bmatrix} \overbrace{X_2} & \overbrace{X_3} \\ -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{rz } A_1 = 2 = m - 1 \quad k_1 = 2$$

Ponieważ $k_1 = \text{rz } A_1 = 2$, to równanie I jest jednoznacznie identyfikowalne

Równanie II

$$A_2 = \begin{bmatrix} \overbrace{Y_3} & \overbrace{X_1} & \overbrace{X_3} \\ -\beta_{13} & -\gamma_{11} & 0 \\ 1 & -\gamma_{31} & -\gamma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{rz } A_2 = 2 = m - 1$$

Ponieważ $k_2 = 3 > \text{rz } A_2 = 2$ zatem równanie II jest niejednoznacznie identyfikowalne

Równanie III

$$A_3 = \begin{bmatrix} \overbrace{Y_1} & \overbrace{X_2} \\ 1 & 0 \\ -\beta_{21} & -\gamma_{22} \end{bmatrix} \quad \text{rz } A_3 = 2 = m - 1 \quad k_3 = 2$$

Ponieważ $k_3 = \text{rz } A_3 = m - 1$, zatem równanie III jest jednoznacznie identyfikowalne

Wszystkie trzy równania są identyfikowalne, zatem istnieje możliwość oszacowania jego parametrów.

1.15 Pośrednia metoda najmniejszych kwadratów

Ma ona zastosowanie do szacowania parametrów modeli o równaniach współzależnych jednoznacznie identyfikowalnych. Metoda ta może być także stosowana do szacowania parametrów pojedynczych równań jednoznacznie identyfikowalnych wchodzących w skład modelu o równaniach współzależnych.

1.15.1 Procedura pośredniej metody najmniejszych kwadratów.

1. Sprowadza się model do postaci zredukowanej

$$Y = \Pi^T Z + \eta$$

2. Parametry postaci zredukowanej szacuje się klasyczną metodą najmniejszych kwadratów korzystając ze wzoru

$$P = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y$$

gdzie

$$\bullet P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mk} \end{bmatrix} \text{ – oceny macierzy } \Pi^T \text{ parametrów postaci zredukowanej}$$

$$\bullet Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1k} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & z_{mk} \end{bmatrix} \text{ – macierz obserwacji zmiennych z góry ustalonych występujących w modelu}$$

$$\bullet Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{bmatrix} \text{ – macierz obserwacji zmiennych łącznie współzależnych występujących w modelu.}$$

3. Oceny parametrów postaci strukturalnej uzyskuje się rozwiązując układ równań

$$BP^T = -\Gamma$$

2025-04-16

1.16 Weryfikacja modeli

Jedną z podstawowych miar jakości dopasowania modelu do danych empirycznych jest **współczynnik determinacji**. Ma on postać

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

Miarą uzupełniającą miarę R^2 jest **współczynnik zbieżności** φ^2 . Ma on postać

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

$$R^2 + \varphi^2 = 1$$

Przykład 1.13

Na podstawie obserwacji zawartych w tabeli oszacowano model liniowy opisujący zależność zmiennej Y od zmiennych X_1 oraz X_2 :

$$\hat{Y} = 10,45 + 0,75X_1 - X_2$$

y	x_1	x_2	\hat{y}
10	0	0	10,45
11	4	2	11,45
12	1	1	10,20
10	0	1	9,45
8	0	1	9,45

$$R^2 = 0,3125 \quad \varphi^2 = 0,6875$$

Wniosek: Model w 31% wyjaśnia zmienność zmiennej Y

1.16.1 Istotność parametrów strukturalnych. Test na podstawie statystyki F

Współczynnik determinacji – przy dodatkowym założeniu o normalności rozkładu wektora składnika losowego – może być zbadany z punktu widzenia rozkładu użytecznego do budowy testu dotyczącego istotności parametrów. W tym przypadku hipoteza zerowa ma postać

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

przeciwko hipotezie alternatywnej

$$H_1 = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m| \neq 0$$

W razie braku podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej należy uznać, że wszystkie m parametrów (zmiennych objaśniających) należałoby z modelu usunąć, wobec czego procedurę budowania modelu należy rozpocząć od nowa

Przy prawdziwości hipotezy zerowej statystyka $F = \frac{n-m-1}{m} \cdot \frac{R^2}{1-R^2}$ ma rozkład F-Fishera-Snedecora z $n_1 = m$ oraz $n_2 = n - m - 1$ stopniami swobody.

gdzie

- m – liczba zmiennych
- n – liczba obserwacji

Procedura testowania jest następująca

1. Na podstawie próby obliczamy wartość empiryczną statystyki F .
2. Dla zadanego poziomu istotności α znajdujemy wartość krytyczną F^*
3. Jeżeli $F > F^*$, to hipotezę H_0 odrzucamy.

W przeciwnym razie stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Przykład 1.14

W celu zbadania zmienności koniunktury giełdowej oszacowano model na podstawie na dwudziestu danych miesięcznych i model wygląda następująco

$$\hat{Y} = -0,02X_1 - 0,015X_2 - 0,0013X_3 + 0,014X_4 + 0,01$$

gdzie

- X_1 – przyrost stopy WIBOR
- X_2 – miesięczna stopa inflacji
- X_3 – łączna wartość nowych emisji oferowanych publicznie
- X_4 – saldo obrotów handlu zagranicznego
- Y – stopa zwrotu obliczona z indeksu giełdowego WIG

Założmy, że w modelu tym $R^2 = 0,85$ oraz $\alpha = 0,05$

Zbadaj istotność parametrów w tym modelu, przyjmując że $F^* = 3,06$

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$H_1 : |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + |\alpha_4| \neq 0$$

$$F = 21,25 > F^*$$

Hipotezę zerową w tym przypadku odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej

1.16.2 Test na podstawie statystyki t

Test istotności na podstawie rozkładu t-Studenta dzięki któremu możliwe jest testowanie istotności poszczególnych parametrów (a nie tylko ich wektora)

W modelu $Y = \alpha_1 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m + \varepsilon$ możliwe jest dla każdego $i = 1, 2, \dots, m$ testowanie hipotezy

$$H_0 : \alpha_i = 0 \quad \text{przeciwko} \quad H_1 : \alpha_i \neq 0$$

Przy prawdziwości hipotezy H_0 (i dodatkowym założeniu o normalności wektora składników losowych) statystyka

$$t_i = \frac{a_i}{S(a_i)}$$

ma rozkład t-Studenta o $n - m - 1$ stopniach swobody

Procedura testowania jest następująca:

- 1) Na podstawie próby obliczamy wartość empiryczną t_i statystyki t-Studenta
- 2) Dla zadanego poziomu istotności α odnajdujemy wartości krytyczne t^*
- 3) Jeżeli $|t_i| > t^*$, to hipotezę H_0 odrzucamy.

W przeciwnym razie stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Przykład 1.15

Przypuśćmy, że na podstawie 20-miesięcznych oszacowano model (w nawiasach podano błędy standardowe obliczeń)

$$\hat{Y} = -0,02 \cdot X_1 - 0,015 \cdot X_2 - 0,0013 \cdot X_3 + 0,014 \cdot X_4 + 0,01$$

(0,007)
(0,011)
(0,0001)
(0,012)

na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować istotność parametrów strukturalnych przyjmujemy, że $t^* = 2,131$

$$\begin{array}{l} H_0 : \alpha_1 = 0 \\ H_1 : \alpha_1 \neq 0 \end{array} \quad t_1 = -\frac{0,02}{0,007} = -2,86 \quad |t_1| > t^*$$

$$\begin{array}{l} H_0 : \alpha_2 = 0 \\ H_1 : \alpha_2 \neq 0 \end{array} \quad t_2 = -\frac{0,01}{0,011} = -1,36 \quad |t_2| < t^*$$

$$\begin{array}{l} H_0 : \alpha_3 = 0 \\ H_1 : \alpha_3 \neq 0 \end{array} \quad t_3 = -\frac{0,0013}{0,0001} = -13 \quad |t_3| > t^*$$

$$\begin{array}{l} H_0 : \alpha_4 = 0 \\ H_1 : \alpha_4 \neq 0 \end{array} \quad t_4 = \frac{0,014}{0,012} = 1,17 \quad |t_4| < t^*$$

Dla parametru α_2 i α_4 brakuje podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Oznacza to, że jedynie zmienne X_1 i X_3 mają istotny wpływ na zmienność zmiennej Y

1.16.3 Test na podstawie statystyki t dla kombinacji liniowej parametrów

Pewnym uogólnieniem testu istotności parametrów może być test dotyczący kombinacji liniowej wektora parametrów

W zastosowaniach test ten stosuje się do stwierdzenia czy parametry modelu pozostają w pewnej określonej relacji liniowej. Hipoteza zerowa ma w tym przypadku postać

$$H_0 : \omega^T \alpha = w_0 \quad \text{przeciwko} \quad H_1 : \omega^T \alpha \neq w_0$$

W zapisie tym ω jest pewnym wektorem dobranym zgodnie postulowaną zależnością liniową między parametrami między parametrami w_0 jest zaś określoną liczbą.

Przy prawdziwości hipotezy zerowej H_0 następująca statystyka ma rozkład t-Studenta o $n - m - 1$ stopniach swobody

$$t_e = \frac{\omega^T \cdot a - w_0}{\sqrt{\omega^T \cdot s^2 (X^T X)^{-1} \omega}}$$

gdzie

- s^2 – błąd modelu
- a – wektor parametrów oszacowanych w modelu

Przykład 1.16

Założmy, że oszacowano funkcję charakterystyczną akcji obrazującą zmienność stopy zwrotu akcji BPH w zależności od stóp zwrotu z indeksu WIG20 i na podstawie 30 danych miesięcznych stóp zwrotu otrzymano

$$\hat{Y} = 0,1 + 0,8X$$

Zweryfikować hipotezę, że współczynnik kierunkowy jest o 1 większy od wyrazu wolnego jeśli oszacowana macierz ma postać

$$s^2(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,04 \\ 0,04 & 0,09 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = -1$$

$$H_1 : \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \neq -1$$

$$\omega^T a - \omega_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,8 \end{bmatrix} + 1 = 0,3$$

$$\omega^T s^2(X^T X)^{-1}\omega = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,04 & 0,04 \\ 0,04 & 0,09 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0,05$$

$$t_e = \frac{\omega^T a - \omega_0}{\sqrt{\omega^T(X^T X)^{-1}\omega}} = \frac{0,3}{\sqrt{0,05}} = 1,34 < t^*$$

Wnioskujemy, że mamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

1.17 Badanie autokorelacji składnika losowego

Przy założeniach standardowego modelu liniowego estymator otrzymany metodą najmniejszych kwadratów ma najmniejszą macierz wariancji/kowariancji (w sensie twierdzenia Gaussa-Markowa)

W przypadku, gdy odstąpimy od założenia

$$\text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I$$

Poza przekątną mogą się pojawić wyrazy różne od zera. Jeśli taka sytuacja ma miejsce, to mówimy że mamy do czynienia z autokorelacją składnika losowego

Rozpatrzmy uogólnienie autokorelacji rzędu pierwszego

$$\varepsilon_{t+1} = \rho\varepsilon_t + \eta_t \quad (t = 1, 2, \dots, n-1)$$

gdzie zmienne losowe η_t są niezależne i mają jednakowy rozkład.

1.17.1 Procedura testowania hipotezy o dodatniej autokorelacji

Założmy, że testujemy hipotezę $H_0 : \rho = 0$ przeciwko $H_1 : \rho > 0$

Statystyką testową jest statystyka Durbina-Watsona o postaci

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (e_{t+1} - e_t)^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

1. Wyznaczamy dla otrzymanych obserwacji wartość statystyki DW
2. Następnie dla wybranego z góry poziomu istotności odczytujemy lub obliczamy wartości krytyczne d_L oraz d_U
3. Hipotezę zerową o braku autokorelacji odrzucimy, gdy wartość DW obliczona na podstawie obserwacji będzie mniejsza od d_L

W przypadku, gdy $DW > d_U$ stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

W przypadku, gdy $d_L < DW \leq d_U$ nie podejmujemy żadnej decyzji

Przykład 1.17

Założmy, że w wyniku zastosowania metody najmniejszych kwadratów (20 obserwacji) zaobserwowano reszty podane niżej:

-3.83	-4.2	-1.88	-2.15	-2.01	0.98	2.58	2.6	1.43	1.05
1.46	1.23	-0.1	-1.09	-0.12	1.2	0.29	1.53	1.09	-0.06

Reszty te obliczono na podstawie modelu z jedną zmienną objaśniającą ($n = 1$)

Zweryfikować hipotezę o dodatniej autokorelacji reszt rozpatrywanej w modelu dla $\alpha = 0.05$

$$d_L = 1,2 \quad d_U = 1,41 \quad DW \approx 0.39$$

Ponieważ $DW < d_L$, odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej o dodatniej autokorelacji.

1.17.2 Procedura testowania hipotezy o ujemnej autokorelacji

W przypadku, gdy hipoteza alternatywna jest postaci

$$H_0 : \rho = 0 \quad H_1 : \rho < 0$$

stosujemy procedurę analogiczną jak przy dodatniej autokorelacji. Zamiast statystyki DW stosujemy statystykę

$$DW' = 4 - DW$$

Przykład 1.18

Założmy, że w wyniku zastosowania metody najmniejszych kwadratów (20 obserwacji) zaobserwowano reszty podane niżej:

1.32	-1.11	1.55	-0.29	0.33	0.47	0.17	1.34	-2.57	0.91
-1.31	1.45	-2.85	2.29	-2.25	2.01	-3.15	3.83	-5.53	3.39

Reszty te obliczono na podstawie modelu z jedną zmienną objaśniającą ($n = 1$)

Polecenie: zweryfikować hipotezę o ujemnej autokorelacji reszt w rozpatrywanym modelu dla $\alpha = 0.01$

$$DW' \approx 0,44 \quad d_L = 0,95 \quad d_U = 1.1$$

Ponieważ $DW' < d_L$, odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej o ujemnej autokorelacji.

2025-05-07

1.18 Heteroscedastyczność

Kolejnym odstępstwem od założeń klasycznej metody najmniejszych kwadratów jest rezygnacja z postulatu aby wariancje składnika losowego były stałe w czasie. Przyjmuje się zatem, że

$$\text{cov}(\varepsilon) = V, \quad \text{gdzie } V \neq I$$

W szczególnym przypadku, gdy macierz V jest diagonalna, mamy do czynienia z brakiem autokorelacji, ale jeśli elementy na przekątnej macierzy V są różne od siebie, to mamy do czynienia ze zjawiskiem **heteroscedastyczności** (przy braku autokorelacji).

1.18.1 Test Goldfelda-Quandt

W celu wykrycia tego zjawiska stosujemy test Goldfelda-Quandt. Procedura jest następująca:

1) Obserwacje w liczbie n dzielimy na dwie grupy:

- początkową o liczebności n_1
- końcową o liczebności n_2

W taki sposób, że $n_1 + n_2 = n$

Podział powyższy ma zwykle charakter arbitralny jednak przesłanki do wyboru n_1 i n_2 powinny mieć przynajmniej podstawy intuicyjne

2) Następnie niezależnie dla obu zbiorów obserwacji wyznaczamy oszacowania wektorów parametrów klasyczną metodą najmniejszych kwadratów

3) Następnie szacujemy wariancję w obu grupach według wzorów

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - m - 1} \cdot \sum_{i \in A} e_i^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - m - 1} \cdot \sum_{i \in B} e_i^2$$

gdzie

- m – liczba zmiennych objaśniających
- A jest zbiorem indeksów odpowiadających pierwszej grupie obserwacji
- B jest zbiorem indeksów odpowiadających drugiej grupie obserwacji

4) Hipoteza zerowa ma postać

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Statystyka testowa jest ilorazem wielkości S_1^2 i S_2^2 .

5) Testując hipotezę zerową H_0 przeciwko hipotezie alternatywnej

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

wartość statystyki testowej obliczamy ze wzoru

$$F_e = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Hipotezę zerową odrzucamy jeśli dla zadanego poziomu istotności α

$$F_e > \underbrace{F_\alpha(n_1 - m - 1, n_2 - m - 1)}_{\text{Kwantyl rzędu } 1 - \alpha \text{ rozkładu } F}$$

6) Jeśli hipoteza alternatywna ma postać

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

To wartość statystyki testowej obliczamy ze wzoru

$$F_e = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

Hipotezę odrzucimy, jeśli $F_e > F_\alpha(n_2 - m - 1, n_1 - m - 1)$

Przykład 1.19

W tabeli przedstawimy dane dotyczące zmienności kursów akcji przedsiębiorstw przemysłowych w Stanach Zjednoczonych w ostatnich dwunastu latach (zmienna objaśniana Y) oraz dane dotyczące produkcji przemysłowej (zmienna objaśniająca X)

Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zastosuj procedurę testowania Goldfelda-Quandt:

Produkcja przemysłowa X	Kursy akcji Y	e_i	e_i^2
96	77	14.131	199.685161
100	100	-2.405	5.784025
107	123	-14.093	198.612649
86	91	-16.029	256.928841
73	57	-3.037	9.223369
58	30	-0.277	0.076729
68	43	2.883	8.311689
72	53	-0.653	0.426409
81	59	7.891	62.267881
94	83	4.899	24.000201
99	85	10.979	120.538441
77	65	-4.573	20.912329

$$\hat{y} = -64,005 + 1,616x$$

Kwadraty reszt przyjmują szczególnie dużą wartość dla trzech spośród czterech pierwszych okresów. Dlatego też zdecydujemy się przyjąć $n_1 = 4$ oraz $n_2 = 8$

Teraz szacujemy parametry modelu liniowego dla pierwszej grupy i dla drugiej:

$$\hat{y}_1 = -51,549 + 1,535x \quad \hat{y}_2 = -45,564 + 1,35x$$

Grupa pierwsza:

Produkcja przemysłowa X	Kursy akcji Y	e_i	e_i^2
96	77	18.811	353.853721
100	100	1.951	3.806401
107	123	-10.304	106.172416
86	91	-10.539	111.070521

Grupa druga:

Produkcja przemysłowa X	Kursy akcji Y	e_i	e_i^2
73	57	-4.014	16.112196
58	30	2.736	7.485696
68	43	3.236	10.471696
72	53	-1.364	1.860496
81	59	4.786	22.905796
94	83	-1.664	2.768896
99	85	3.086	9.523396
77	65	-6.614	43.744996

Stawiamy hipotezę:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

$$F_e = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{287,4515}{19.14553} = 15.01403 \quad F_\alpha = 5.14$$

Zatem $F_e > F_\alpha$.

Hipotezę zerową o braku heteroscedastyczności należy odrzucić na rzecz hipotezy alternatywnej, że w początkowej grupie obserwacji wariancja jest większa niż w końcowej grupie obserwacji

Achtung! 3

Co będzie na kartkówce

- 1) Metoda usuwania zmiennych (4 szt możliwe) (trzeba opisać)
- 2) Postać zredukowana, strukturalna oraz klasyfikacja zmiennych (zadanie teoretyczne)
- 3) Weryfikacja modelu (może być zadanie rachunkowe do zrobienia lub opis pewnej procedury)
Chodzi o R^2 , Φ^2 , istotność parametrów strukturalnych (na 3 sposoby), badanie autokorelacji składnika losowego (2 procedury), heteroscedastyczności
- 4) Pośrednia metoda najmniejszych kwadratów (forma opisowa)
Czyli: procedura / twierdzenie, np. o identyfikowalności równań
- 5) Mierniki błędów prognoz ex post

3 zadania na zaliczeniu i 3 zadania na kolosie

1.19 Normalność rozkładu składnika losowego

W testach przedstawionych wcześniej konieczne jest spełnienie założenia o normalności rozkładu składnika losowego. Nie jest to założenie występujące w klasycznym standardowym modelu liniowym. Założenie to jest szczególnie ważne w razie stosowania testów opartych na rozkładzie F ze względu na stosunkowo niską odporność statystyki F na niespełnienia założenia o normalności rozkładu składnika losowego.

Wyróżniamy 2 rodzaje testów:

- dla małej próby $n \leq 30$
- dla dużej próby

dla małej próby stosujemy test Hellwiga. Jest to test zgodności za pomocą którego można zweryfikować hipotezę o dowolnym rozkładzie. Test ten opiera się bowiem na własności:

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład F to zmienna losowa $F(X)$ (tu F – dystrybucja rozkładu $N(0, 1)$) ma rozkład jednostajny. Dla znanej próby x_1, x_2, \dots, x_n z rozkładu F stwierdzimy, że wielkości $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ możemy traktować jako realizację zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0; 1]$. Hipoteza testowana ma w tym przypadku postać

H_0 : reszty mają rozkład normalny przeciwko H_1 : reszty mają inny rozkład

Procedura w teście Hellwiga jest następująca:

1. Dla danego ciągu reszt e_1, e_2, \dots, e_n szacujemy odchylenie standardowe według wzoru

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2}$$

2. Przeprowadzamy standaryzację reszt obliczając wielkości

$$e'_t = \frac{e_t}{s}$$

3. Po uporządkowaniu reszt od najmniejszej do największej obliczamy wartości dystrybuanty rozkładu normalnego dla otrzymanych reszt
4. Odcinek $[0; 1]$ dzielimy na n równych części

$$\left[0; \frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{n-1}{n}; 1\right]$$

Każdą z powstałych części nazywamy celą. Mamy zatem n cel. Następnie obliczamy liczbę cel w których nie ma żadnej z wartości dystrybuant z punktu (3). Liczbę tę oznaczamy literą K

5. Z tablic testu Hellwiga dla zadanego poziomu istotności α odczytujemy wartości krytyczne K_1, K_2

Jeżeli $K < K_1$ lub $K > K_2$, to hipotezę zerową należy odrzucić

Jeżeli $K_1 \leq K \leq K_2$, to stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Przykład 1.20

Założmy, że analizując pewien model liniowy otrzymaliśmy następujące reszty

0.257 0.336 -1.05 -1.983 0.565 -0.227 1.489 1.873 -1.494 0.234

Zweryfikować hipotezę o normalności rozkładu na poziomie istotności $\alpha = 0.05$

H_0 : reszty mają rozkład normalny przeciwko H_1 : reszty mają inny rozkład

$$s \approx 1.166042$$

e	e'	e' rosnąco	$F(e')$ rosnąco
0.257	0.220	-1.701	0.0445
0.336	0.288	-1.281	0.1001
-1.05	-0.900	-0.900	0.1839
-1.983	-1.701	-0.195	0.4228
0.565	0.485	0.201	0.5795
-0.227	-0.195	0.220	0.5872
1.489	1.277	0.288	0.6134
1.873	1.606	0.485	0.6860
-1.494	-1.281	1.277	0.8992
0.234	0.201	1.606	0.9459

$$[0; 0,1) \cup [0,1; 0,2) \cup [0,2; 0,3) \cup [0,3; 0,4) \cup [0,4; 0,5) \cup \\ [0,5; 0,6) \cup [0,6; 0,7) \cup [0,7; 0,8) \cup [0,8; 0,9) \cup [0,9; 1]$$

$$K = 3$$

Z testu Hellwiga $K_1 = 1, K_2 = 5$

Ponieważ $1 < 3 < 5$ na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

2 Prognozowanie na podstawie szeregów czasowych

2.1 Metody naiwne w prognozowaniu

Najprostszymi metodami wykorzystywanymi do wyznaczania prognoz są metody naiwne. Ze względu na prostotę są one najczęściej wykorzystywanymi metodami w praktyce. Obliczenie prognozy polega na skorygowaniu wartości z poprzedniego okresu o pewną wielkość.

2.1.1 Przykłady

1. $y_t^* = y_{t-1}$

Prognoza równa jest wartości z okresu poprzedniego. Ma ona zastosowanie gdy występuje stały poziom zjawiska w czasie i wahanie przypadkowe

2. $y_t^* = y_{t-1} + C$

Prognoza równa jest wartości z okresu poprzedniego powiększone o pewną stałą wielkość C ustaloną z góry. Ma zastosowanie, gdy występuje liniowa tendencja rozwojowa i wahania przypadkowe

3. $y_t^* = y_{t-1} \cdot \sqrt[t-2]{\frac{y_{t-1}}{y_{t-2}} \cdot \frac{y_{t-2}}{y_{t-3}} \cdot K \cdot \frac{y_2}{y_1}} = y_{t-1} \cdot \sqrt[t-2]{\frac{y_{t-1}}{y_1}}$

Prognoza równa jest wartości z okresu poprzedniego powiększona o średni przyrost względny poziomu zjawiska z poprzednich okresów dla których zgromadzono materiał empiryczny (średnio-okresowe tempo zmian poziomu zjawiska). Ma zastosowanie gdy występuje nieliniowa tendencja rozwojowa i wahania przypadkowe.

4. $y_t^* = y_{t-r} \cdot (1 + C)$

Prognoza równa jest wartości z tego samego podokresu poprzedniego cyklu sezonowości powiększona o pewien ustalony z góry procent (C). Ma zastosowanie gdy występuje nieliniowa tendencja rozwojowa, wahania sezonowe i wahania przypadkowe. Kryterium wyboru spośród metod stanowi wielkość błędów prognoz *ex post*. Do prognoz wybiera się schemat i parametry dla których błędy są najmniejsze.

2.2 Progностyczny model średniej ruchomej prostej i ważonej

Model ten stosuje się w przypadku gdy w badanym okresie występuje stały poziom wartości zmiennej prognozowanej zakłócany jedynie odchyleniami przypadkowymi. Wykorzystanie modelu średniej ruchomej polega na wyznaczeniu prognozy jako średniej arytmetycznej zwykłej bądź ważonej z k ostatnich wartości zmiennej.

W przypadku gdy będziemy obliczali średnie arytmetyczne zwykłe będziemy mieli do czynienia z modelem średniej ruchomej prostej, z którego prognozy wyznacza się na podstawie następującego wzoru:

$$y_t^* = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k}^{t-1} y_i$$

gdzie

- k – stała wygładzania, liczba wyrazów średniej ruchomej, która określana jest przez prognozę

W przypadku modelu średniej ruchomej ważonej prognozy wyznacza się jako średnie ważone, a wagi ustala się tak by była realizowana zasada postarzania informacji (nowsze tendencje silniej oddziałują na prognozowane zjawisko).

$$y_t^* = \sum_{i=t-k}^{t-1} y_i w_{i-1+k+1}$$

gdzie

- w – waga wartości zmiennej prognozowanej w danym momencie lub okresie.

Wagi muszą spełniać następujące zależności zgodnie z zasadą postarzania informacji:

$$0 < w_1 < w_2 < \dots < w_k \leq 1 \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1$$

Kryterium wyboru stałej wygładzania stanowią błędy prognoz *ex post*, a w szczególności wielkość średniego kwadratowego błędu prognozy *ex post* (odchylenia standardowego prognoz) lub współczynnika zmienności prognoz oraz średniego względnego błędu prognoz *ex post*. Do modelu wybiera się tą stałą dla której błędy są najmniejsze.

2.3 Mierniki błędów prognoz *ex post*

Bezwzględny błąd prognozy *ex post*:

$$q_t = y_t - y_t^*$$

Względny błąd prognozy *ex post*:

$$q'_t = \left| \frac{y_t - y_t^*}{y_t} \right|$$

Średni kwadratowy błąd prognozy *ex post* oraz odchylenie standardowe prognoz oblicza się według poniższych wzorów:

$$s_P^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n (y_t - y_t^*)^2 \quad s_P = \sqrt{s_P^2}$$

W przypadku porównywania s_P obliczonego dla różnej liczby okresów (różne k) należy go odnieść do średniego poziomu zjawiska w przedziale empirycznej weryfikacji prognoz obliczając współczynnik zmienności prognoz:

$$V_P = \frac{s_P}{\bar{y}} \cdot 100\%$$

Średni względny błąd prognozy *ex post* oblicza się następująco:

$$\bar{q} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n \frac{|y_t - y_t^*|}{y_t} \cdot 100\%$$

Do modelu wybiera się tą statą, dla której błędy są najmniejsze.

2025-05-28

2.4 Analiza szeregów czasowych dynamicznych

Wszystko co się dzieje w społeczeństwie i w gospodarce odbywa się w czasie. Wyrazem tego jest zmienność zjawisk społeczno-gospodarczych. Zjawiska zmieniają się w czasie, różnych jego jednostkach, przyjmują najczęściej różny poziom. Ciąg obserwacji badanego zjawiska w kolejnych jednostkach czasu w wyróżnionym przedziale czasowym nosi nazwę **szeregu czasowego** (jest to szereg dynamiczny i chronologiczny)

Szeregi dynamiczne dzieli się na

- szeregi czasowe momentów,
- szeregi czasowe okresów.

W szeregach czasowych momentów absolutne wielkości wyrażające poziom danego zjawiska obrazują stany w danym momencie, np. szereg czasowy przedstawiający liczbę ludności w Polsce pierwszego stycznia każdego roku.

W szeregach czasowych okresów poszczególne wielkości absolutne wyrażają poziom danego zjawiska w pewnych okresach np. miesięcznych, kwartalnych, rocznych. Szeregiem czasowym okresów jest np. szereg przedstawiający miesięczne zużycie energii elektrycznej w Lublinie w danym roku.

Oznaczając ogólnie kolejne jednostki czasu t numerami $1, 2, \dots, n$, gdzie n oznacza łączną liczbę okresów lub momentów, zaobserwowane zaś wartości zjawiska przedstawiając jako y_t , szereg czasowy możemy zapisać następująco

t	y_t
1	y_1
2	y_2
\vdots	\vdots
n	y_n

Jednym z ważniejszych zadań analizy szeregów czasowych jest określenie prawidłowości zmian poziomu zjawiska badanego w czasie. Poznanie podstawowych prawidłowości rozwoju zjawisk ekonomicznych odbywa się poprzez wyodrębnienie tendencji rozwojowej. Zazwyczaj tendencja jest rezultatem działań zespołu przyczyn wpływających w sposób ciągły na zjawisko badane w długim okresie. W celu wykrycia ogólnej tendencji zmian zjawiska ekonomicznego w skończonym przedziale czasu należy wyrównać szereg czasowy. Konieczność taka jest spowodowana tym, że oprócz czynników głównych oddziałujących na kształtowanie się wartości szeregu czasowego, wpływa na nie także duża liczba czynników przypadkowych. Czynniki główne wyznaczają konkretną postać składnika systematycznego (inaczej trendu), z kolei czynniki przypadkowe powodują odchylenia zaobserwowanych wartości szeregu czasowego od wielkości wyznaczonych przez trend

2.4.1 Funkcje trendu

Funkcje trendu są matematycznymi funkcjami zmiennej czasowej. Szereg czasowy składa się wtedy z dwóch elementów, to jest funkcji trendu $f(t)$ oraz odchyień losowych:

$$y = f(t) + \varepsilon$$

gdzie

- y – zjawisko badane w czasie,
- f – określona postać analityczna funkcji zmiennej czasowej t .

- ε – odchylenie losowe.

Po oszacowaniu otrzymuje się równanie trendu $\hat{y} = f(t)$, gdzie \hat{y} – wartości trendu zmiennej y

2.4.2 Najczęściej spotykane postaci analityczne funkcji trendu

1. Trend liniowy

$$\hat{y} = a_0 + a_1 t$$

W trendzie liniowym parametr a_0 jest interpretowany jako wyrównany poziom zjawiska y w okresie zerowym, z kolei a_1 oznacza przeciętny przyrost zjawiska y w przedziale czasu od 1 do n . Parametry trendu liniowego szacuje się za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów.

$$a_1 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sum_{t=1}^n (t - \bar{t})^2} \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{t}$$

Jeśli $t = 1, 2, \dots, n$, to

$$a_1 = \frac{12 \sum_{t=1}^n (t - \hat{t}) y_t}{n(n^2 - 1)}$$

2. Trend nieliniowy

a) Trend wykładniczy

$$\hat{y} = a_0 a_1^t$$

b) Trend logarytmiczny

$$\hat{y} = a_0 + a_1 \ln t$$

c) Trend potęgowy

$$\hat{y} = a_0 \cdot t^{a_1}$$

d) Trend logistyczny

$$\hat{y} = \frac{a_0}{1 + a_1 e^{-t}}$$

e) Trend hiperboliczny

$$\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{t}$$

Przykład 2.1

Sprzedaż pewnego wyrobu w ciągu 10 kolejnych miesięcy jest dana tabelą. Oszacować i zinterpretować parametry wykładniczej funkcji trendu.

Miesiąc	Sprzedaż
1	0.5
2	1
3	2
4	5
5	7
6	15
7	33
8	62
9	120
10	250

$$y = a_0 a_1^t \quad | \quad \ln()$$

$$\ln y = \ln a_0 + t \cdot \ln a_1$$

$$y^* = \ln y \quad a_0^* = \ln a_0 \quad a_1^* = \ln a_1$$

$$y = e^{y^*} \quad a_0 = e^{a_0^*} \quad a_1 = e^{a_1^*}$$

$$\hat{y} = 0.260 - (1.984)^t$$

Interpretując oszacowane parametry możemy powiedzieć, że w miesiącu poprzedzającym badaniu sprzedaż tego wyrobu wyniosła około 260 sztuk, a sprzedaż w ciągu 10 badanych miesięcy przeciętnie wzrasta z miesiąca na miesiąc prawie dwukrotnie

2.5 Adaptacyjne metody wyodrębniania tendencji rozwojowej

Klasyczne funkcje trendu ukazują ogólną tendencję rozwojową badanego zjawiska w całym przedziale czasu od 1 do n . Można je więc stosować wtedy, gdy taką tendencję da się zaobserwować. Jednakże czasami tendencja rozwojowa w miarę upływu czasu podlega zmianie. Do opisu zmienności tendencji rozwojowej zjawiska służą adaptacyjne modele trendu, jak np. trend pełzający czy średnia ruchoma.

Metody adaptacyjne stosujemy gdy nie można zaobserwować wyraźnej tendencji w rozwoju zjawiska, gdy badacz nie może się zdecydować na typ krzywej mającej reprezentować trend oraz gdy tendencja w miarę upływu czasu ulega dynamicznym i nieregularnym zmianom.

Punktem wyjścia metody trendu pełzającego jest szereg czasowy y_1, y_2, \dots, y_n zmiennej Y w badanym przedziale czasowym. Następnie wybiera się z góry liczbę naturalną k zwaną długością segmentu taką, że $k < n$.

W metodzie trendu pełzającego rozpatruje się k -elementowe ciągi kolejnych obserwacji czyli podszeregi czasowe (segmenty)

$$\begin{aligned} & y_1, y_2, \dots, y_k \\ & y_2, y_3, \dots, y_{k+1} \\ & \vdots \\ & y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+k-1} \\ & \vdots \\ & y_{t-k+1}, y_{t-k+2}, \dots, y_n \end{aligned}$$

Ciągów tych jest $n - k + 1$.

Do wyznaczenia trendu pełzającego na podstawie k kolejnych obserwacji za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów szacuje się parametry liniowych trendów odcinkowych

$$\begin{aligned} \hat{y}^1 &= \hat{a}_0^1 + \hat{a}_1^1 t & t &= 1, 2, \dots, k \\ \hat{y}^2 &= \hat{a}_0^2 + \hat{a}_1^2 t & t &= 2, 3, \dots, k-1 \\ & \vdots \\ \hat{y}^l &= \hat{a}_0^l + \hat{a}_1^l t & t &= l, l+1, \dots, l+k-1 \\ & \vdots \\ \hat{y}^{n-k+1} &= \hat{a}_0^{n-k+1} + \hat{a}_1^{n-k+1} t & t &= n-k+1, n-k+2, \dots, n \end{aligned}$$

2.5.1 Wzory na oceny parametrów

Wzory na oceny parametrów trendów odcinkowych przedstawiają się następująco:

$$a_1^l = \sum_{t=l}^{l+k-1} \frac{(y_t - \bar{y}_l)(t - \bar{t}_l)}{\sum_{t=l}^{l+k-1} (t - \bar{t}_l)^2}$$

gdzie

- $\bar{y}_l = \frac{1}{k} \sum_{t=l}^{l+k-1} y_t$
- $\bar{t}_l = \frac{1}{k} \sum_{t=l}^{l+k-1} t$
- $l = 1, 2, \dots, n - k + 1$

Dla każdego równania trendu odcinkowego oblicza się teoretyczne wartości zmiennej Y

$$\hat{y}^l = a_0^l + a_1^l, \quad l = 1, 2, \dots, n - k + 1, \quad t = l, t + 1, \dots, t + k - 1$$

Każdej jednostce czasu t odpowiada u wartości teoretycznych

$$u = \begin{cases} t, & \text{dla } t = 1, 2, \dots, k - 1 \\ k, & \text{dla } t = k, k + 1, \dots, n - k + 1 \\ n - t - 1, & \text{dla } t = n - k + 2, n - k + 3, \dots, n \end{cases}$$

Następnie wyznacza się ciąg n średnich arytmetycznych teoretycznych wartości zmiennej Y przyporządkowanych kolejnym jednostkom czasu

$$\bar{y}_t = \frac{1}{u} \sum_{l=1}^{n-k+1} \hat{y}^l, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Taki ciąg \bar{y}_t to szereg czasowy wygładzony za pomocą trendu petzającego

2.5.2 Interpretacje

Wygładzony szereg czasowy można interpretować jako takie wielkości badanej zmiennej, które by-tyby osiągnięte gdyby na to zjawisko nie oddziaływały czynniki przypadkowe zakłócające zmienność badanego zjawiska w czasie.

Przykład 2.2

Zaobserwowano przeciętne ceny targowiskowe pewnego dobra w kolejnych kwartałach w latach 2010-2018. Należy wyznaczyć trend petzający prezentowanego zjawiska

Rok	Kwartał 1	Kwartał 2	Kwartał 3	Kwartał 4
2010	12	15,6	10	12,3
2011	17,4	20	10,4	14,1
2012	15	22,8	9,4	6,2
2013
2014
2015
2016
2017
2018	26.4	30	17.4	25.6

Przyjmujemy $k = 4$ bo są 4 kwartały

Przedział czasu	Równanie segmentu
1 – 4	$\hat{y}^1 = 13,65 - 0,47t$
2 – 5	$\hat{y}^2 = 11,13 + 0,77t$
3 – 6	$\hat{y}^3 = -0,87 + 3,51t$
4 – 7	$\hat{y}^4 = 16,73 - 0,31t$
5 – 8	$\hat{y}^5 = 28,15 - 1,9t$
...	...

$$\hat{y}^l = a_0^l + a_1^l t$$

Wartości wygładzone

Rok	Kwartał 1	Kwartał 2	Kwartał 3	Kwartał 4
2010	13,18	12,69
2011
...

Achtung! 4: Kartkówka

(Odpowiedź na pytanie “Ile potrwa kartkówka?”)

3 krótkie pytania ewentualnie krótkie zadanie i tyle, mamy mieć swoje kartki, trwa 45 minut